


28th INTERNATIONAL CONGRESS OF ACTUARIES

The international meeting of the actuarial profession

28e CONGRÈS INTERNATIONAL DES ACTUAIRES

Le rendez-vous international de la profession actuarielle

Gestion du niveau de la franchise d'un contrat avec bonus-malus

Pierre THEROND & Stéphane BONCHE

WINTER & ASSOCIÉS

I.S.F.A.

SOMMAIRE

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

Contexte

Contrat ne faisant pas l'objet d'une personalisation a posteriori du tarif fondée sur la sinistralité individuelle des assurés.

→ la prime que paie l'assuré est identique à celle des assurés appartenant à la même classe de risque ; elle n'est pas révisée en fonction de sa propre sinistralité.

Dans ce cadre, nous supposerons que tous les sinistres dont le montant est supérieur à la franchise sont déclarés (il n'est pas rationnel de ne pas déclarer de tels sinistres car cela n'engendre pas d'augmentation de la prime future).

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Bonnes propriétés du modèle collectif (1/3)

En l'absence de franchise, le montant à la charge de l'assureur vaut :

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Hypothèses classiques du modèle collectif :

- les N, X_1, X_2, … sont mutuellement indépendantes,
- les X_1, X_2, … sont identiquement distribuées de f.r. F.

La loi de S est donnée par :

$$\Pr(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(s)$$

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Bonnes propriétés du modèle collectif (2/3)

En présence d'une franchise de montant *d*, la charge de l'assureur vaut :

$$S_d := \sum_{i=1}^{N} (X_i - d)^+ = \sum_{j=1}^{N_d} {}_dX_j.$$

où :

- ${}_dX_j = X_{U_j} - d,$ avec $U_j := \inf\left\{k \in \mathbf{N}^* \middle| \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{X_i > d} = j\right\}$
- $N_d = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{X_n > d},$

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Bonnes propriétés du modèle collectif (3/3)

– Loi de N_d : $${}_dp_k = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left[1 - F(d)\right]^k F(d)^{n-k} p_n.$$

– Loi de ${}_dX$: $${}_dF(y) := \Pr[{}_dX_1 \leq y] = \frac{F(d+y) - F(d)}{1 - F(d)}.$$

Proposition 1 *La variable aléatoire N_d est indépendante de la suite $({}_dX_j)_{j\geq 1}$.*

⇒ la loi de S_d est donnée par :

$$\Pr(S_d \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_dF^{*n}(s)\, {}_dp_n,$$

⇒ les hypothèses du modèle collectif sont conservées malgré l'introduction d'une franchise.

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Diminution de franchise (1/5)

La diminution de franchise (de *d* à $\delta < d$) entraîne une augmentation de la prime pure qui peut se décomposer en deux effets :

- l'augmentation de $d - \delta$ de la charge pour les sinistres qu'il payait déjà,
- le prise en charge des sinistres dont le montant est compris entre δ et d.

Formellement :

$$\Pi_\delta = \frac{\mathrm{E}\left(X-\delta|X>\delta\right)\Pr(X>\delta)}{\mathrm{E}\left(X-d|X>d\right)\Pr(X>d)}\Pi_d.$$

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Diminution de franchise (2/5)

En pratique, on ne dispose pas d'information sur les sinistres dont le montant est compris entre δ et d, on ne connaît ni leur coût moyen, ni (surtout) leur nombre.

⇒ Solution pratique : faire un hypothèse paramétrique sur la distribution des sinistres qui dépassent d puis estimer les paramètres de la loi tronquée en deçà de d.

⇒ Quelle loi utiliser ?

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Diminution de franchise (3/5)

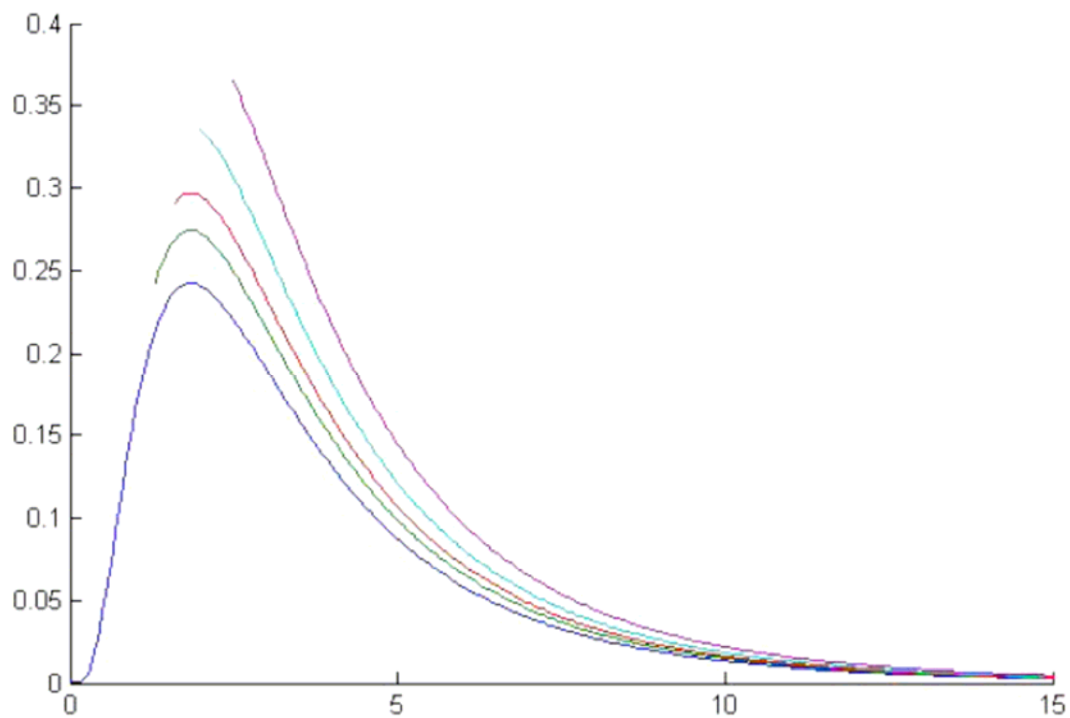


FIG. 1 – Densités de lois log-normales tronquées

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Diminution de franchise (4/5)

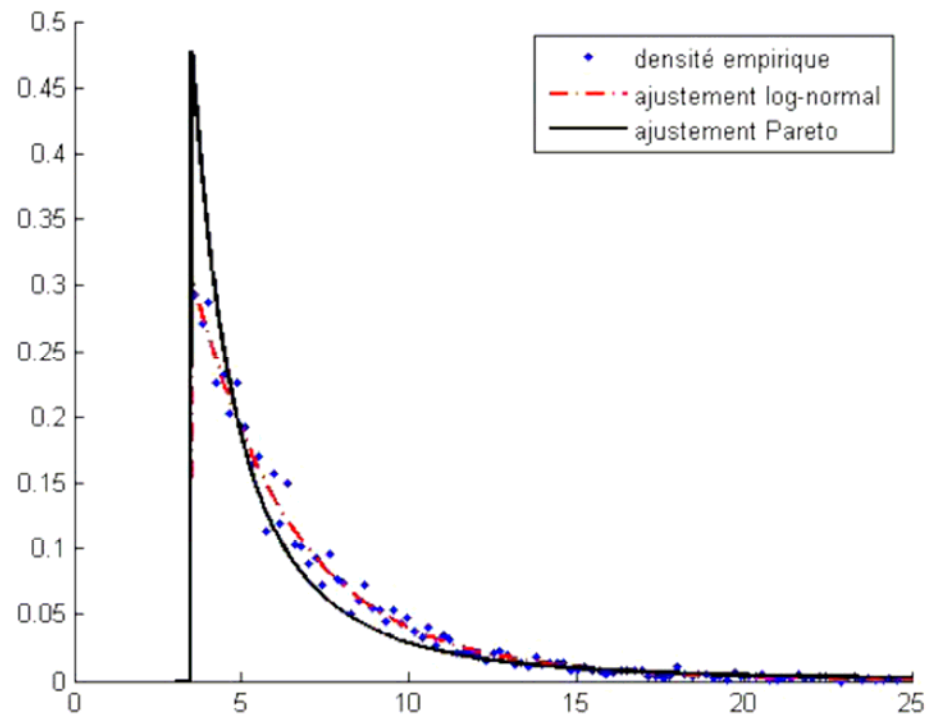


FIG. 2 – Ajustement des coûts de sinistres dépassant la franchise

1. Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

A - Diminution de franchise (5/5)

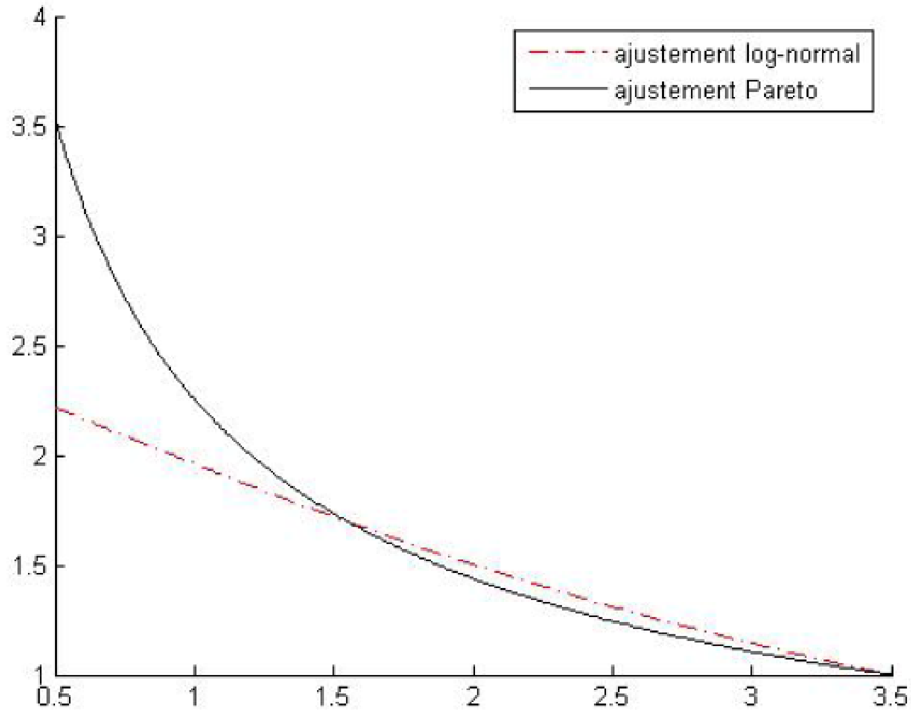


FIG. 3 – Augmentation de la prime pure en fonction du niveau de la nouvelle franchise

2. Systèmes bonus-malus

Contexte

En présence d'un SBM, tous les sinistres supérieurs à la franchise ne sont pas déclarés : les assurés ne déclarent pas les sinistres les plus petits pour ne pas recevoir de malus (*soif de bonus*).

Dans un contexte de réduction de franchise, ces sinistres doivent être modélisés :certains sinistres qui n'étaient pas déclarés le deviendront.

2. Systèmes bonus-malus

A - Modélisation en chaîne de Markov

Le parcours d'un assuré dans un SBM à classes se décrit aisément à l'aide de la modélisation en chaîne de Markov.

Kelle [2000] propose une modélisation en chaîne de Markov du SBM français.

Notons $\mathbf{P}_\theta$ la matrice de transition décrivant le parcours dans l'échelle d'un assuré de facteur de risque.

2. Systèmes bonus-malus

B - Franchise économique (1/5)

Un assuré ne déclarera un sinistre que si le montant de ce sinistre est supérieur à une *franchise économique* qui est une combinaison de :

- la franchise contractuelle et,
- de l'impact du malus engendré par la déclaration sur les primes futures.

2. Systèmes bonus-malus

B - Franchise économique (2/5)

Formellement

$$d^{eco}(\tilde{\theta}, \psi, L_1^-, L_1^+) = d + \Pi_d \sum_{k=0}^{\xi-1} \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^k \rho e^{-\psi_k k}.$$

où :

- Π_d correspond à la prime,
- les r_j sont les coef. de réduction/majoration des primes,
- ξ est la période au bout de laquelle la distribution stationnaire est atteinte (chaîne régulière),
- ^θ l'estimation faite par l'assuré de son propre facteur de risque,
- L_1^+ et L_1^- les degrés de l'échelle atteints selon s'il y a déclaration,
- ψ_k le facteur d'escompte de la prime à payer dans k années.

2. Systèmes bonus-malus

B - Franchise économique (3/5)

Cette expression est assez souple, en particulier :

- d^{eco} admet un maximum pour $\tilde{\theta} = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = 0$
  qui correspond à la situation d'un assuré qui estime qu'il n'aura pas de sinistre dans le futur et qui n'actualise pas les primes futures.

- d^{eco} admet un minimum pour $\tilde{\theta} = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \infty.$
  qui correspond à la situation d'un assuré qui ne raisonne que sur la prime de l'année suivante.

2. Systèmes bonus-malus

B - Franchise économique (4/5)

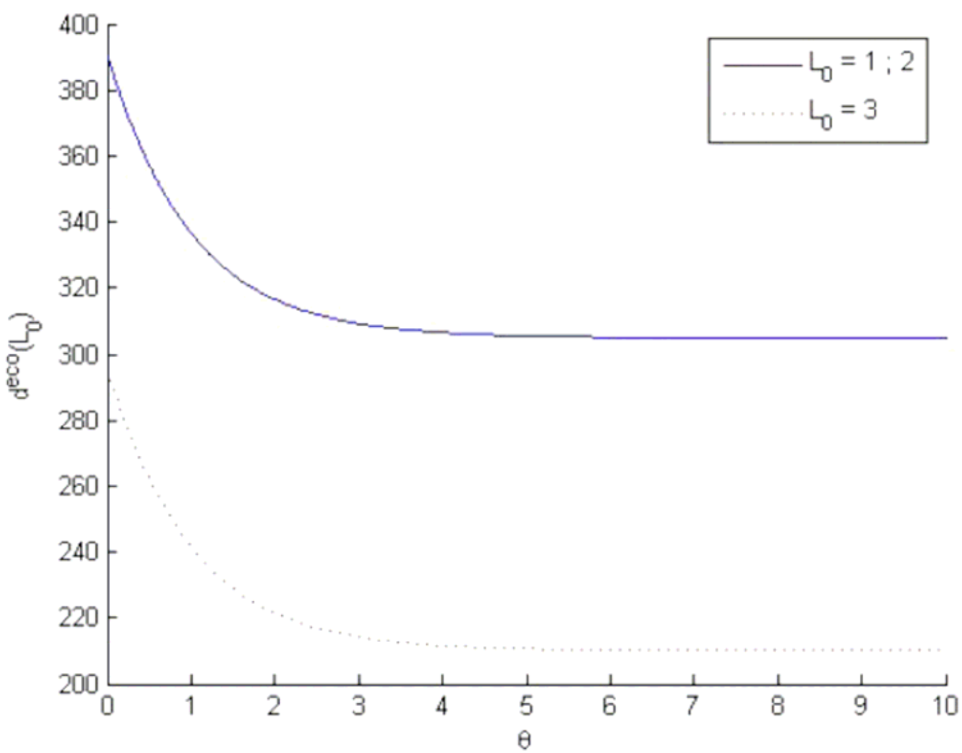


FIG. 4 – Sensibilité à la fréquence de sinistres anticipée

2. Systèmes bonus-malus

B - Franchise économique (5/5)

L'assureur ne sait pas quelles estimations sont faites individuellement par les assurés.

S'il dispose d'un nombre important de déclarations de sinistres dont les montants sont compris entre d et d^{eco}_{max}, il peut estimer la distribution de D^{eco} sur son portefeuille et en déduire celle de Θ.

Pour cela, il faut se donner une loi de la distribution des sinistres supérieurs à la franchise (déclarés ou pas) et regarder la probabilité qu'un sinistre de montant $d < x < d^{eco}_{max}$ soit déclaré.

Le lien monotone entre θ et d^{eco} permet d'obtenir une estimation de la distribution de Θ.

3. Réduction de franchise dans un SBM

A - Point de vue de l'assuré

Réduire la franchise entraîne une réduction de la franchise économique :

$$d^{eco}(\tilde{\theta}, \psi, L_1^-, L_1^+) = d + \Pi_d \sum_{k=0}^{\xi-1} \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^k \rho e^{-\psi_k k}.$$

Sous l'hypothèse que la prime reste constante, posons $\delta < d$, on a :

$$\delta^{eco} - \delta < d^{eco} - d$$

car $\theta_\delta \geq \theta_{\underline{d}}$

3. Réduction de franchise dans un SBM

B - Application au portefeuille (1/3)

Récapitulatif de la procédure (1/2)

1. Détermination du seuil d_{max}^{eco} au-delà duquel tous les sinistres sont déclarés.
2. Ajustement d'un modèle paramètrique tronqué sur ces données.
3. Sur les sinistres dont les montants sont compris entre d et d_{max}^{eco}, estimation de la loi de D^{eco} grâce à l'étude de l'abattement observé entre les sinistres supposés survenus (issus de l'ajustement paramétrique) et les sinistres observés.
4. Déduction de la loi de Θ pour une franchise de niveau d.

3. Réduction de franchise dans un SBM

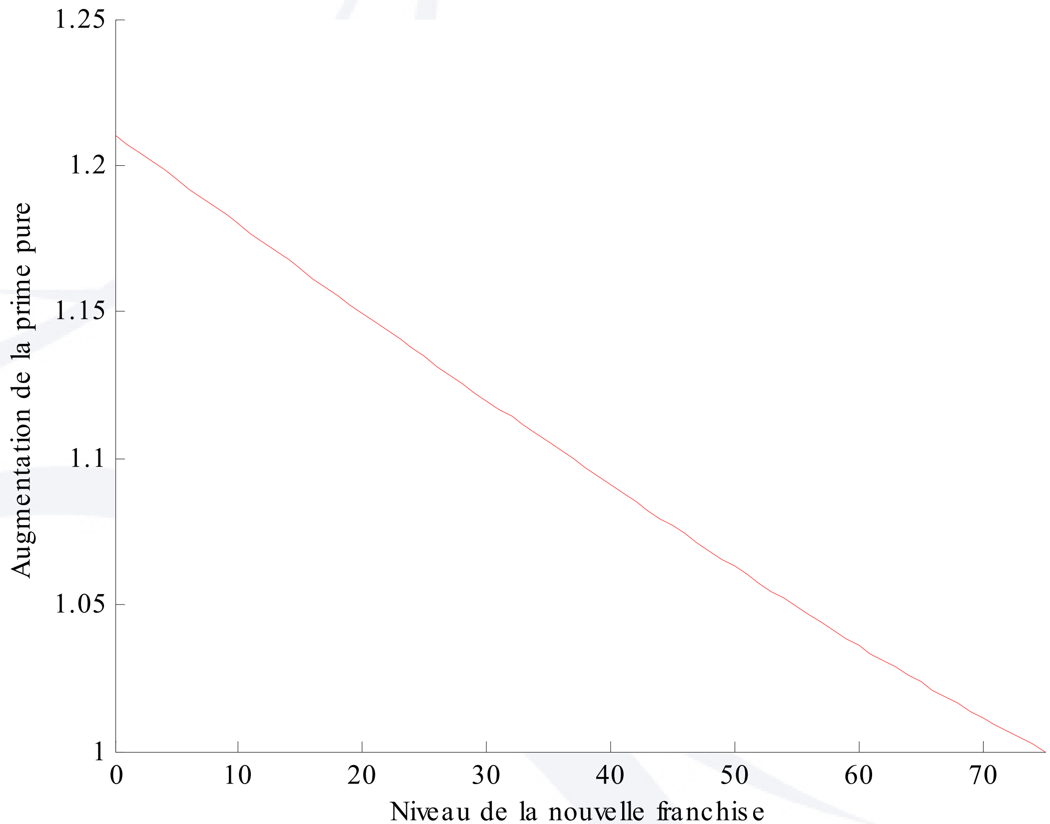
B - Application au portefeuille (2/3)

Récapitulatif de la procédure (2/2)

5. Déduction de la loi de Θ pour une franchise de niveau δ.
6. A partir du modèle paramétrique, estimation des sinistres survenus au-delà de la nouvelle franchise δ.
7. Abattement de ceux-ci grâce à la loi de Θ pour une franchise de niveau δ, de manière à obtenir les sinistres que l'on observera.
8. Estimation de la prime pure pour un contrat de franchise δ à partir de ces sinistres.

3. Réduction de franchise dans un SBM

B - Application au portefeuille (3/3)



Conclusion

A - Problèmes d'ordre technique posés par la réduction de franchise :

- en l'absence de SBM : modélisation des données tronquées par la franchise actuelle.
- en présence de SBM :
  - modélisation des données partiellement tronquées par la soif de bonus (modélisation du comportement des assurés) ;
  - modélisation de la déformation de cette loi résultant de la diminution de franchise.

B - Problème d'ordre social posé par la réduction de franchise :

→ mesure qui ne profite qu'aux assurés qui ont des sinistres.

Biliographie (1/2)

Antal, P. (2003) *Quantitative methods in reinsurance*. Notes de cours, ETH Zürich.

Bonche, S., Brau, L., Olympio, N. (2005) *Decreasing the deductible in an automobile insurance policy*. Mémoire de groupe de travail, ISFA.

Dempster, A., Laird, N., Rubin, D. (1977) « Maximum likelihood from incomplete data via em algorithm (with discussion) ». *Journal of the Royal Statistical Society* B 39, 1-38.

Denuit, M., Charpentier, A. (2005) *Mathématiques de l'assurance non-vie*. Vol. 2. Economica, Paris.

Holtan, J. (2000) Optimal loss financing under bonus-malus contracts. *ASTIN Bulletin* 31 (1), 161-73.

Kelle, M. (2000) Modélisation du système bonus-malus français. *Bulletin français d'actuariat* 7 (7), 61-82.

Biliographie (2/2)

Lemaire, J. (1977) La soif du bonus. *ASTIN Bulletin* 9, 181-90.

Lemaire, J. (1995) *Bonus-malus systems in automobile insurance*. Kluwer Academic Publishers.

Partrat, C., Besson, J.-L. (2005) *Assurance non-vie. Modélisation, simulation*. Economica, Paris.

Planchet, F., Thérond, P.-E., Jacquemin, J. (2005) *Modèles financiers en assurance - Analyses de risque dynamiques*. Economica, Paris.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999) *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, New York.

Ter Berg, P. (1994) Deductibles and the inverse gaussian distribution. *ASTIN Bulletin* 24 (2), 319-23.

Wahlin, J.-F., Paris, J. (2000) The true claim amount and frequency distributions within a bonus-malus system. *ASTIN Bulletin* 30 (2), 391-403.

Contacts

Pierre THEROND

ptherond@winter-associes.fr

Stéphane BONCHE

stbonche@yahoo.fr

Article disponible sur :

http://therond.pierre.free.fr/