Approche scientifique des logiciels DFA

Commission Dommages de l'Institut des Actuaires

Mardi 3 février 2004

Frédéric PLANCHET
Actuaire Associé

Pierre THEROND
Actuaire

Introduction

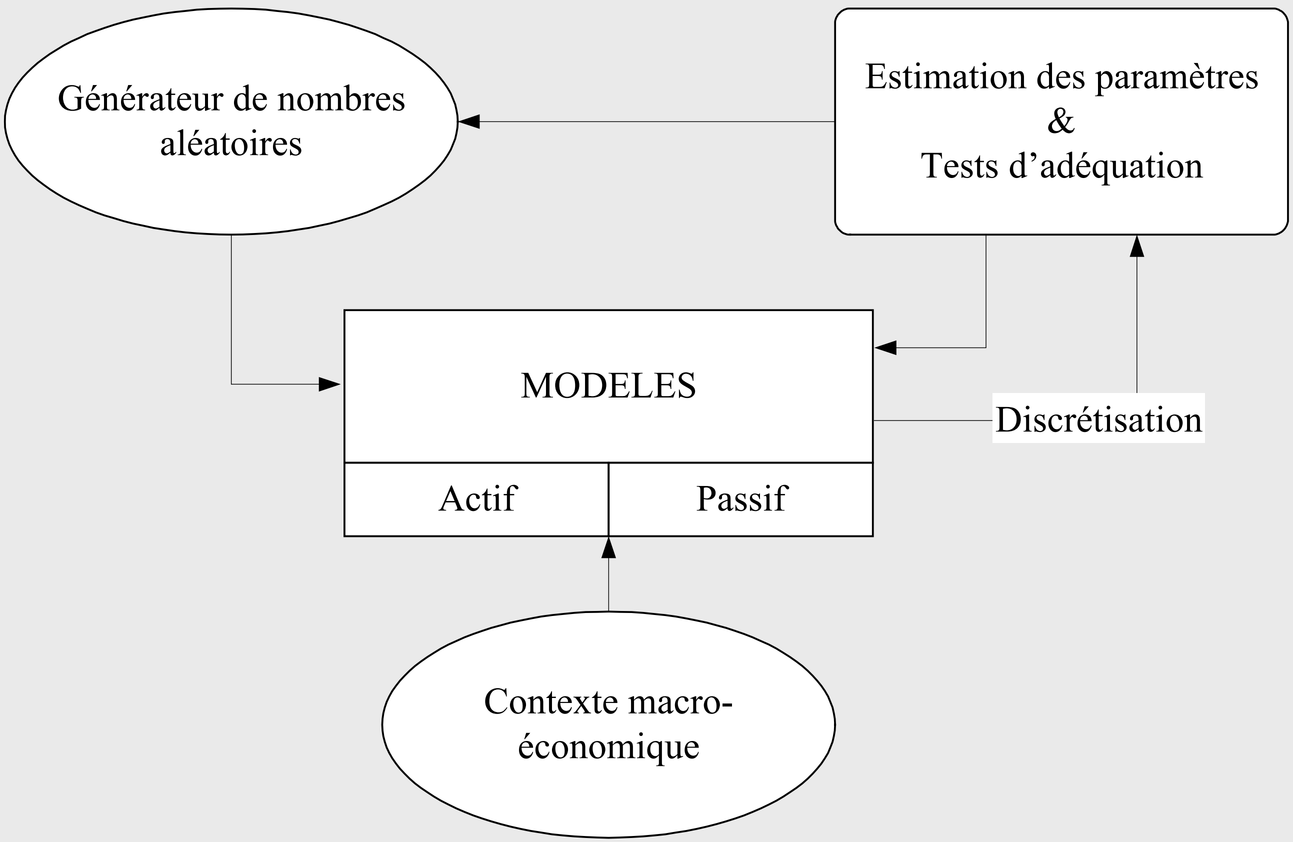
Plus qu'un modèle, la DFA est une démarche, un ensemble de méthodes, qui vise à intégrer l'ensemble des phénomènes ayant un impact sur la société d'assurance (non-vie) dans le but d'obtenir des informations sur la distribution d'une variable d'intérêt (résultat, niveau de fonds propres, probabilité de ruine, etc.).

Aussi modèles, paramètres des modèles et nombre de simulations seront fonctions de la variable d'intérêt et de l'horizon de projection.

→ L'implémentation informatique d'un modèle DFA s'avère complexe.

L'objectif de cet exposé est d'attirer l'attention sur quelques points importants dans la mise en place d'un logiciel DFA efficace.

Schéma de fonctionnement d'un logiciel DFA



SOMMAIRE

1. Discrétisation de processus continus

De nombreuses variables (notamment le cours des actifs) sont généralement modélisées par des processus continus. L'implémentation informatique de tels modèles passe par la discrétisation des trajectoires.

Cette étape nécessite une attention particulière car elle peut être l'origine de biais non négligeables.

1. Discrétisation de processus continus

Exemple : le modèle de Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\, dB_t$$

Discrétisation selon le schéma d'Euler :

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t) + \sigma\, \tilde{\varepsilon}$$

Discrétisation selon le schéma de Milstein corrigé :

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t) - \frac{a^2(b - r_t)}{2} + \sigma\, \tilde{\varepsilon}_1 - \frac{a\sigma}{2}\left\{\tilde{\varepsilon}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\tilde{\varepsilon}_2\right\}$$

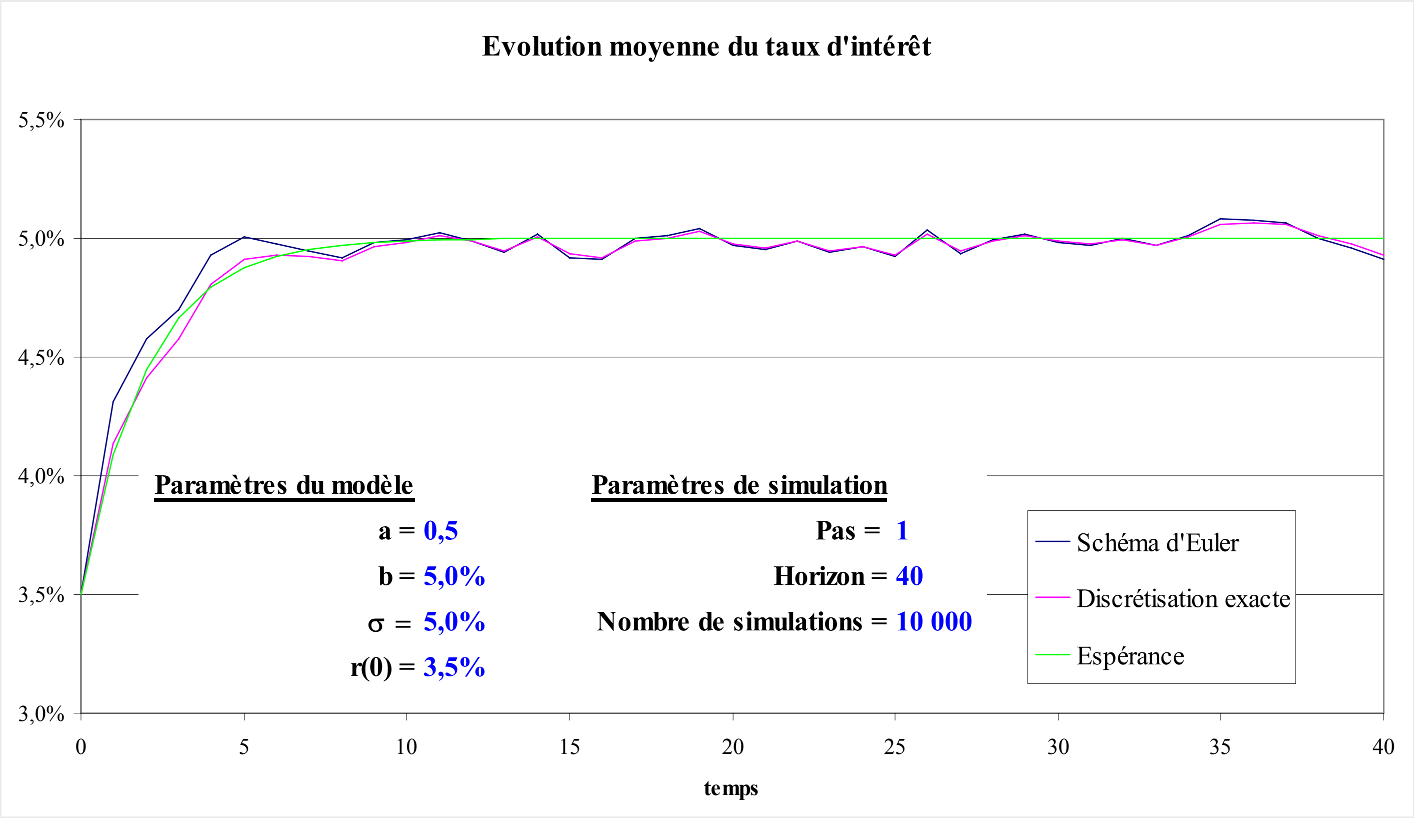
Discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = b(1 - e^{-a}) + e^{-a} r_t + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}\,\tilde{\varepsilon}$$

NB: Le biais constaté lors de l'utilisation de tels modèles a deux sources : l'estimation des paramètres et la discrétisation.

1. Discrétisation de processus continus

Exemple : le modèle de Vasicek



1. Discrétisation de processus continus

Estimation des paramètres du modèle

Le schéma de discrétisation retenu va conditionner l'estimation des paramètres. En effet, il va s'agir d'estimer les paramètres à partir du processus discrétisé (par la méthode du maximum de vraisemblance par exemple) et non à partir du modèle continu.

La discrétisation exacte, comme la discrétisation selon le schéma d'Euler, du modèle de Vasicek nous amène à considérer une équation du type : $Y = \alpha + \beta X + \sigma\varepsilon$

La méthode des moindres carrés nous donne des estimateurs sans biais de α, β et σ^2:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2}{n-2} \quad \text{où} \quad y_i^* = \bar{y} - \hat{\beta}(x_i - \bar{x})$$

1. Discrétisation de processus continus

<u>Estimation des paramètres du modèle</u>

$$Y = \alpha + \beta X + \sigma\varepsilon$$

Discrétisation d'Euler :

$$\hat{a}_{euler} = 1 - \hat{\beta} \qquad \hat{b}_{euler} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{a}_{euler}} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\beta}} \qquad \hat{\sigma}^2_{euler} = \hat{\sigma}^2$$

Discrétisation exacte :

$$\hat{a}_{exact} = -\ln \hat{\beta} \qquad \hat{b}_{exact} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\beta}} \qquad \hat{\sigma}^2_{exact} = \hat{\sigma}^2 \frac{2 \ln \hat{\beta}}{\hat{\beta}^2 - 1}$$

→ **Ces estimateurs sont EMV mais pour certains biaisés.**

2. Génération de nombres aléatoires

Les techniques de Monte-Carlo se fondent sur la génération de réalisations de variables aléatoires. Ces réalisations sont obtenues à partir de transformations de réalisations de variables aléatoires de loi uniforme sur [0;1[.

On distingue deux familles de générateurs de nombres aléatoires :

- Les générateurs pseudo-aléatoires (ex : la fonction *Rnd* d'Excel/VBA).
- Les générateurs quasi-aléatoires (ex : l'algorithme du tore).

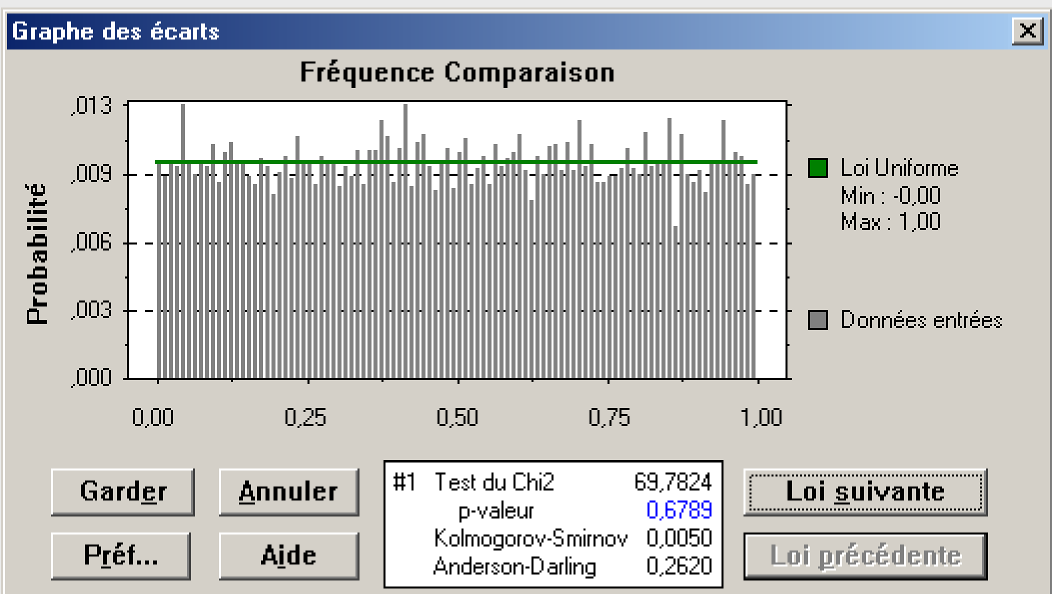
2. Génération de nombres aléatoires

Exemple de générateur pseudo-aléatoire : Rnd d’Excel/VBA

Il s’agit d’un générateur congruentiel défini par :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbf{N}^* \\ X_{n+1} = (k * X_n + p)\ \mathbf{Mod}\ m \end{cases}$$

Tests statistiques pour 10 000 valeurs générées :

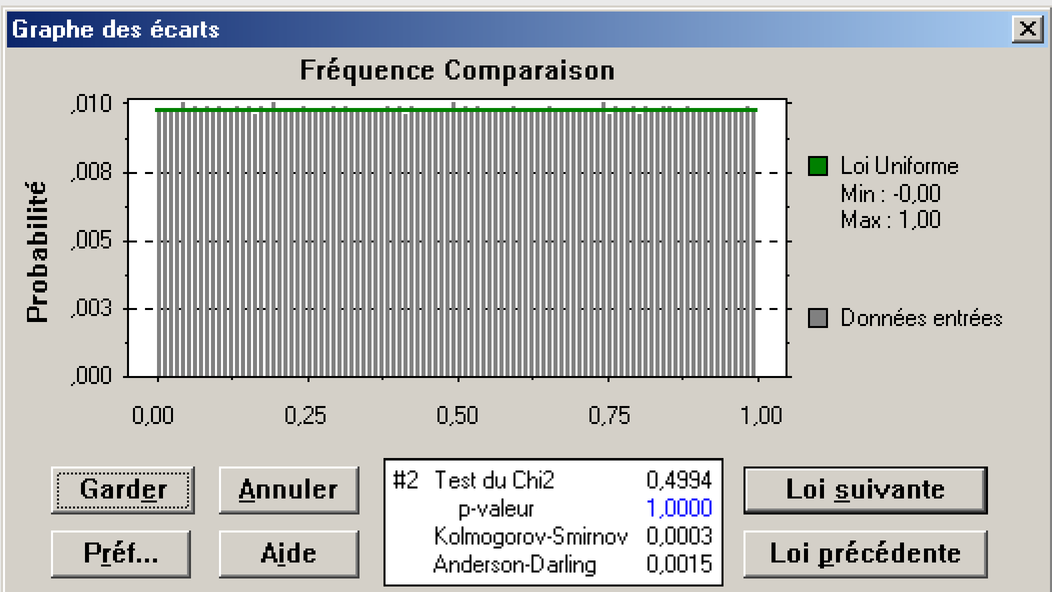


2. Génération de nombres aléatoires

<u>Exemple de générateur quasi-aléatoire : la translation irrationnelle du tore</u>

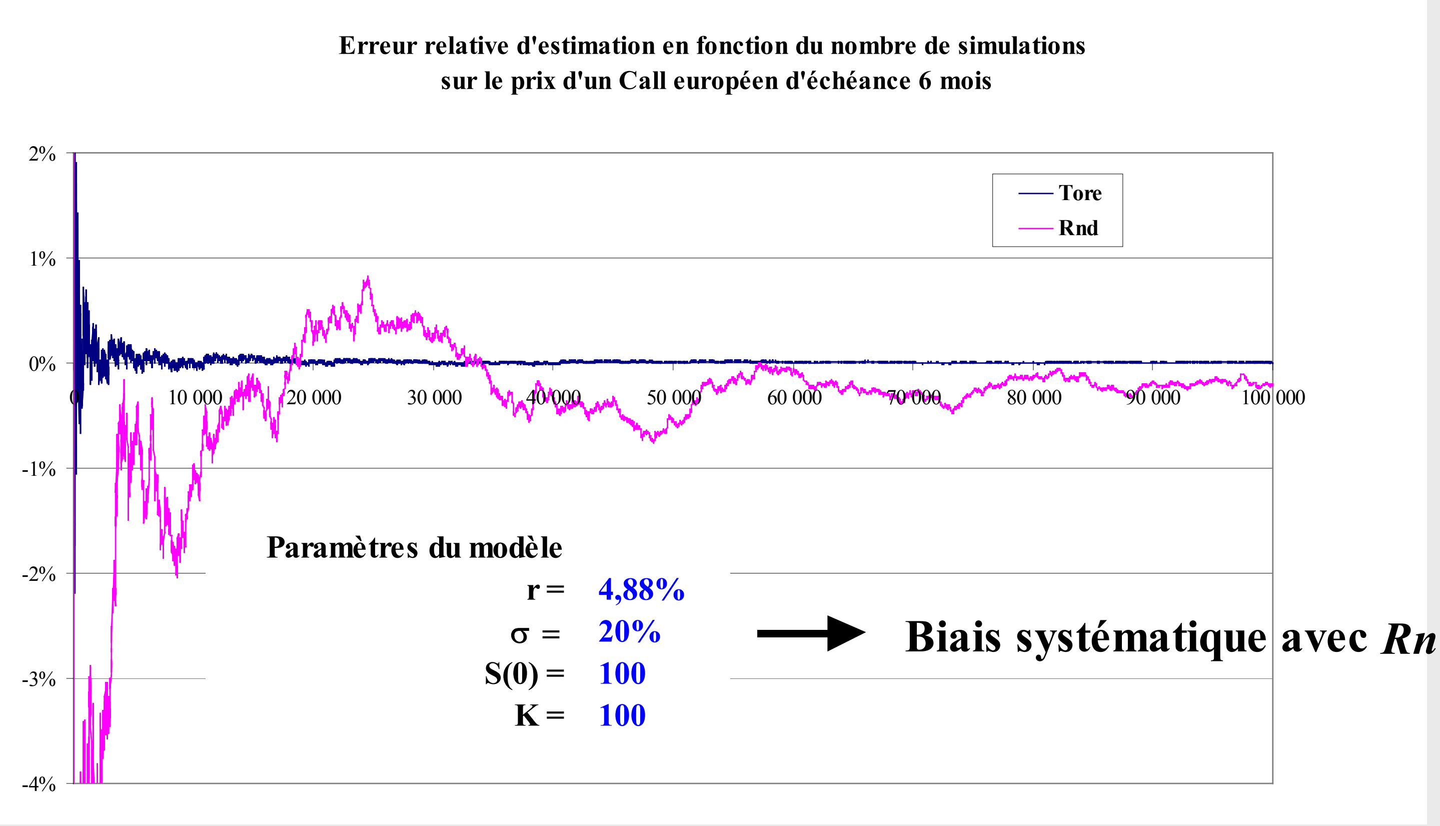
Ce générateur est défini par la suite : $\begin{cases} X_n = n\sqrt{p} - \left[n\sqrt{p} \right] \\ p \text{ premier} \end{cases}$

Tests statistiques pour 10 000 valeurs générées :



2. Génération de nombres aléatoires

Comparaison de la précision des deux générateurs



→ **Biais systématique avec *Rnd* ()**

2. Génération de nombres aléatoires

Nombre de simulations

Disposer d'une formule fermée (ex : prix du Call européen) permet de calibrer le nombre de simulations nécessaires pour observer de manière satisfaisante la variable d'intérêt. Ainsi le nombre de simulations ne dépend pas que de l'horizon de projection mais aussi de la volatilité des variables modélisées et du générateur de nombres aléatoires sélectionné.

Exemple : Prix du Call européen d'échéance 6 mois

Nombre minimal de simulations à partir de l'algorithme du tore (p=5) pour que l'erreur d'estimation relative soit inférieure à 0,1 %.

$\sigma = 20\ \% \longrightarrow N_{min} \approx 7\ 000$

$\sigma = 50\ \% \longrightarrow N_{min} \approx 15\ 000$

3. La translation irrationnelle du tore

Précautions d'application

Les valeurs successives générées par l'algorithme du tore ne sont pas indépendantes, ceci a deux conséquences importantes :

- il est impossible d'utiliser la technique de Box-Muller pour générer des réalisations de loi N(0;1) : on se tournera alors vers des algorithmes d'inversion de la fonction de répartition d'une loi normale (algorithme de De Moro par exemple) ;
- il ne faut pas prendre les valeurs « dans l'ordre » pour obtenir des trajectoires pas à pas.

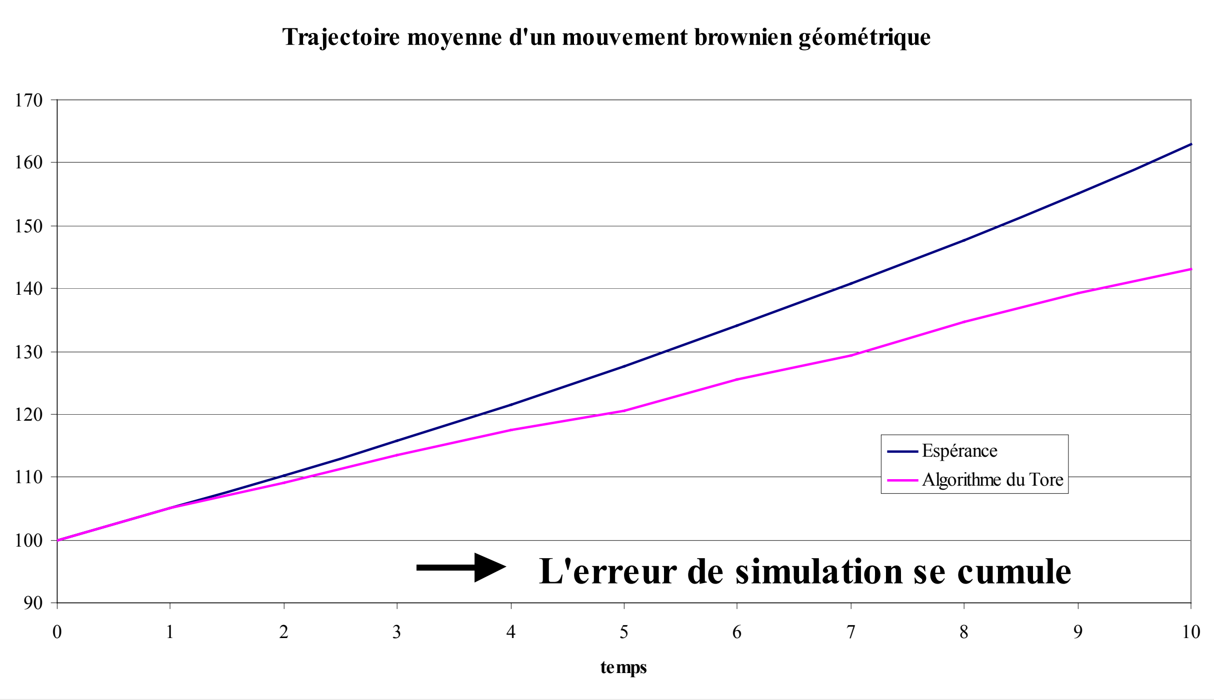
3. La translation irrationnelle du tore

Précautions d'application

Utiliser les nombres générés « à la suite » pour obtenir une trajectoire conduit à un biais :

$$S_{t+1} = S_t\left(1 + \mu + \sigma\,\tilde{\varepsilon}_{t+1}\right)$$

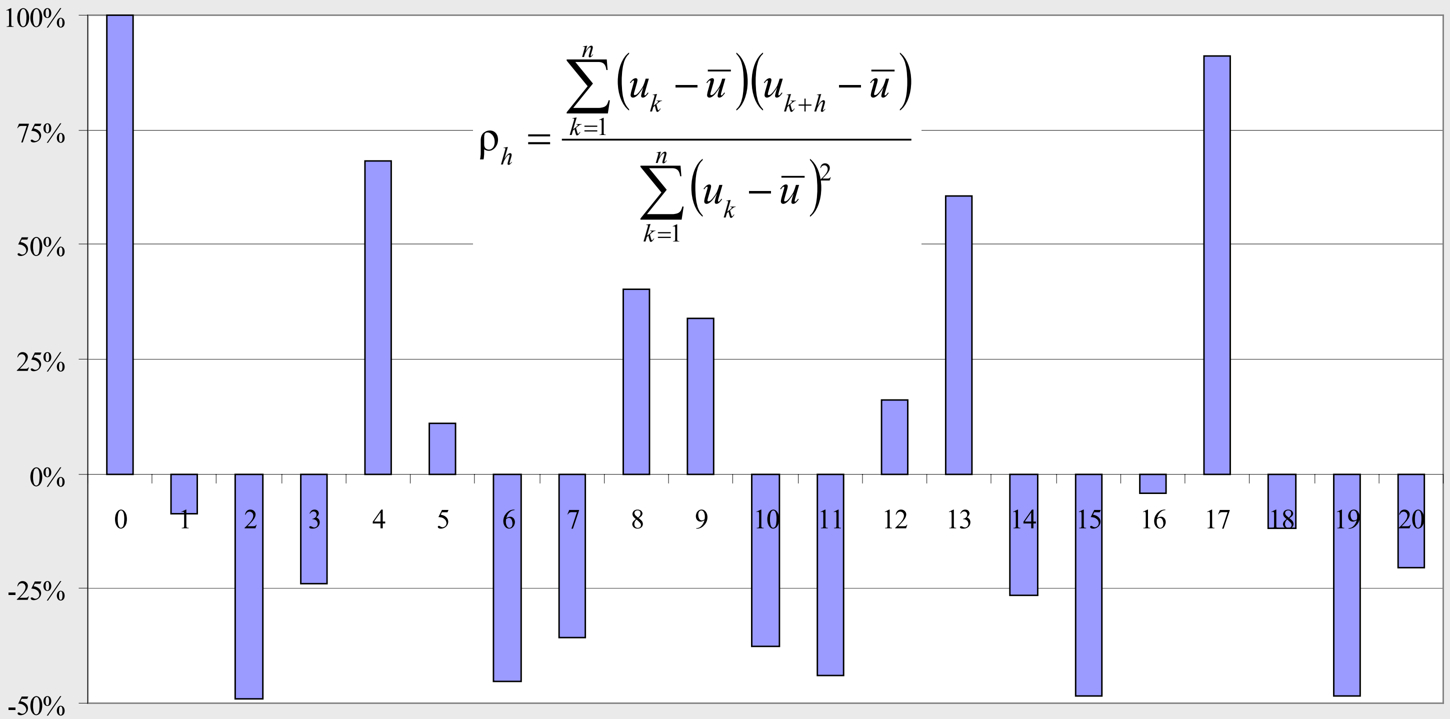
(3000 tirages)



3. La translation irrationnelle du tore

Précautions d'application : justification du biais

Corrélogramme de la suite générée à partir de p = 5



$$\rho_h = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(u_k - \bar{u}\right)\left(u_{k+h} - \bar{u}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \left(u_k - \bar{u}\right)^2}$$

→ **Non indépendance terme à terme (seulement globalement)**

3. La translation irrationnelle du tore

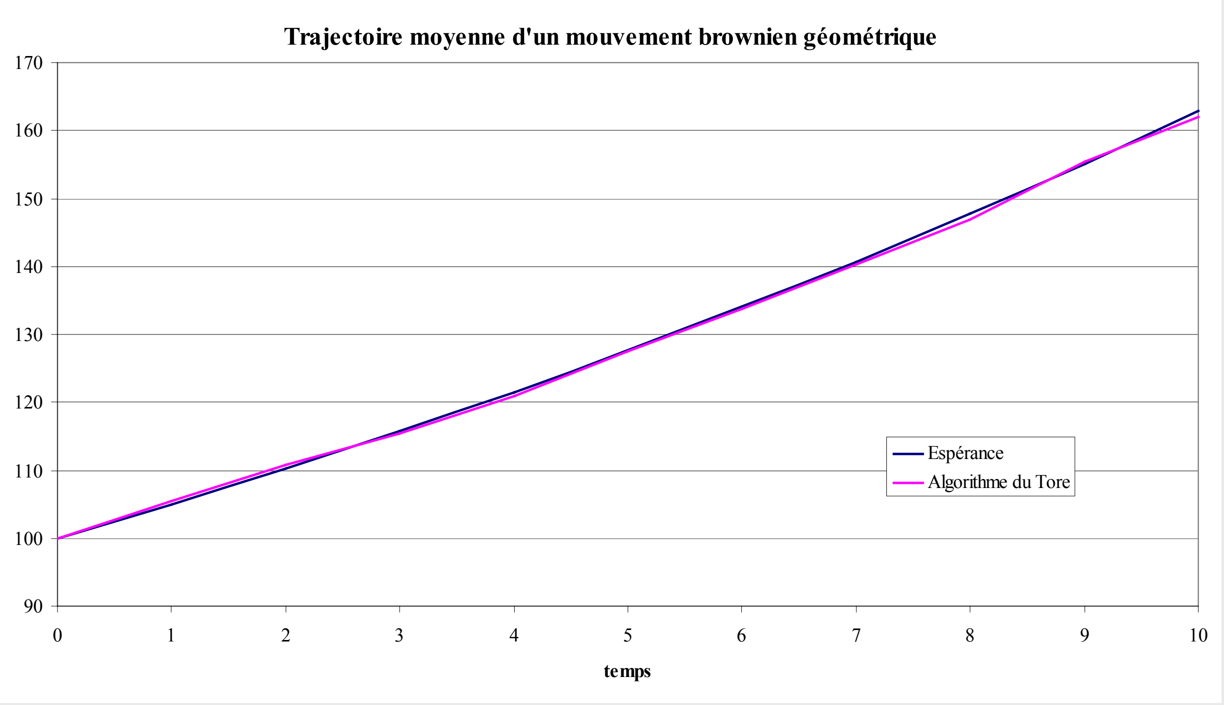
Précautions d'application

Une solution consiste à mélanger ces nombres avant de les utiliser, le résultat est alors :

Méthode :

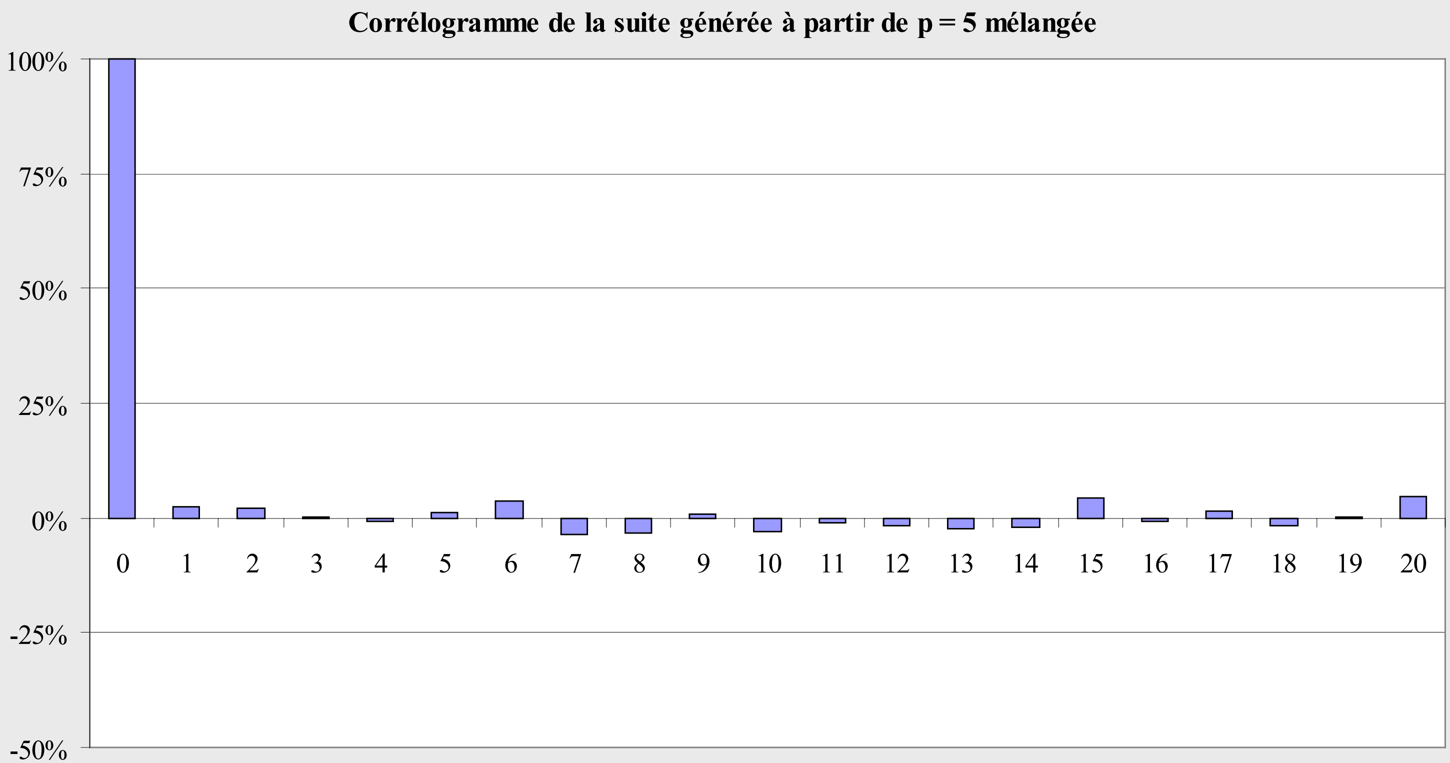
u_i est remplacé par u_I où I est issu d'un tirage dans $\{1,..,N\}$ selon *Rnd*() par exemple.

(3000 tirages)



3. La translation irrationnelle du tore

Précautions d'application : justification de l'indépendance retrouvée



→ **Les dépendances terme à terme sont supprimées**

Conclusion

L'implémentation informatique d'un modèle DFA nécessite de porter une attention particulière aux points suivants :

- ✓ choix du processus de discrétisation,
- ✓ choix du générateur de nombres aléatoires,
- ✓ choix des estimateurs et des méthodes d'estimation.

Pour nous contacter

Frédéric PLANCHET
Actuaire Associé
fplanchet@jwa.fr

Pierre THEROND
Actuaire
ptherond@jwa.fr

JWA – Actuaires

Bureau de Paris
9, rue Beaujon
75008 Paris
01-45-72-63-00

Bureau de Lyon
18, avenue Félix Faure
69007 Lyon
04-37-37-80-90