

# L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance

Frédéric PLANCHET\*

Pierre-E. THEROND<sup>α</sup>

ISFA – Université Lyon 1 <sup>β</sup>  
Joël Winter & Associés <sup>γ</sup>

## RESUME

L'objectif de ce travail est de proposer un modèle statistique opérationnel intégrant des sauts pour un actif risqué, en généralisant le modèle de Black & Scholes. Ce modèle est actuellement la référence pour les praticiens de l'assurance, or dans les nouvelles problématiques engendrées par les changements comptables (IFRS) et prudentiels (Solvabilité 2), ce modèle peut conduire à sous-estimer le risque de placement et par là les provisions ou encore le capital cible de la société. Les procédures statistiques d'estimation des paramètres du modèle retenu (modèle de Merton) sont présentées et illustrées sur des données réelles puis le modèle est mis en œuvre dans des problématiques de pricing d'option et de détermination d'un capital de solvabilité.

MOTS-CLEFS : Modèles d'actifs, processus à sauts, solvabilité 2, estimation.

## ABSTRACT

The aim of this paper is to propose an operational statistical model with jumps for a risky asset, by generalizing the model of Black & Scholes. This model is currently the reference for the experts in insurance, but in the new context generated by the accounting standards changes (IFRS) and prudential changes (Solvency 2), this model can result in underestimating the risk of placement and by there the provisions or the target capital of the company. The statistical procedures for the estimation of the parameters of the model selected (model of Merton) are presented and illustrated on real data then the model is applied in problems of pricing of option and determination of a target capital.

KEYWORDS : Asset models, jump process, solvency 2, estimation.

*Journal of Economic Literature Classification: C13 & G22.*

---

\* Frédéric Planchet est professeur associé de Finance et d'Assurance à l'ISFA (Université Lyon 1 – France) et actuaire associé chez Joël Winter & Associés. Contact : fplanchet@jwa.fr.

<sup>α</sup> Pierre Théron est étudiant en doctorat à l'ISFA et actuaire chez Joël Winter & Associés. Contact : ptherond@jwa.fr.

<sup>β</sup> Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50, avenue Tony Garnier 69366 Lyon Cedex 07.

<sup>γ</sup> Joël Winter & Associés - 9, rue Beaujon 75008 Paris et 18, avenue Félix Faure 69007 Lyon.

# 1. Introduction

Le modèle de référence pour la modélisation de l'évolution des actifs risqués est, dans les modèles d'assurance, celui de BLACK et SCHOLES [1973], qui considère que les cours peuvent être représentés par un mouvement brownien géométrique. Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, etc. Un certain nombre d'observations empiriques (*cf.* MANDELBROT [1962], [1963] et FAMA [1965]) contredisent manifestement ces hypothèses : les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et au surplus les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale.

Le graphique ci-dessous<sup>1</sup> illustre ces constatations :



Dans le contexte actuel d'utilisation du modèle de Black et Scholes en assurance, essentiellement dans le cadre de la détermination d'allocations stratégiques et de l'évaluation d'options (pour des garanties plancher sur des contrats en unités de compte par exemple), cette relative inadéquation du modèle à la réalité s'avère assez peu pénalisante. En pratique elle est largement compensée par la facilité de mise en œuvre du modèle.

Toutefois, le projet Solvabilité 2 (*cf.* COMMISSION EUROPEENNE [2003], [2004] et AAI [2004]) en cours d'élaboration modifie profondément les règles de fixation du niveau des fonds propres en assurance en introduisant comme critère explicite le contrôle du risque global supporté par la société. Ce risque devra notamment être quantifié au travers la probabilité de ruine.

Dans ce nouveau contexte, les inconvénients principaux de modélisations de type « brownien géométrique » et notamment l'insuffisance de l'épaisseur des queues de distribution (qui conduit à une trop faible représentation des événements rares) et la non prise en compte des chocs, à la hausse ou à la baisse, sur les cours (qui conduit à ne pas intégrer au modèle d'événements exceptionnels et brutaux) peuvent avoir des conséquences importantes sur l'appréciation du niveau de capital nécessaire pour contrôler la ruine au niveau fixé. Ce point est par exemple abordé dans BALLOTTA [2004] pour le cas des options cachées d'un contrat d'épargne, et dans PLANCHET et THEROND [2005] dans le cadre d'un modèle mono périodique simplifié en assurance non-vie pour la détermination d'un capital cible et l'allocation d'actifs.

Comme indiqué au début de ce travail, un grand nombre de solutions alternatives au modèle de Black et Scholes ont été proposées dans la littérature : on peut notamment mentionner le

<sup>1</sup> Evolution fin 2004 du titre de Mercer, données issues de <http://www.yahoo.fr>.

modèle i.i.d.  $\alpha$ -stable (cf. FAMA et ROLL [1971]), les modèles à volatilité stochastique, comme par exemple celui de HULL et WHITE [1987], des processus mixtes brownien Poisson (cf. BELLAMY [1999]), ou encore des martingales discontinues (cf. DRITSCHEL et PROTTER [1999]). Les méthodes statistiques associées à ce type de processus sont souvent difficiles à mettre en œuvre (voir par exemple D'ESTAMPES [2003] sur ce sujet).

Compte tenu de la place privilégiée du mouvement brownien géométrique, nous nous intéressons ici aux modèles généralisant cette approche et incluant le mouvement brownien géométrique comme cas particulier. Le modèle proposé par MERTON [1976] est de ce point de vue assez naturel ; c'est donc le modèle que nous retiendrons ici.

Notre objectif est de proposer une méthodologie statistique simple à mettre en œuvre permettant de décider si, dans le contexte rappelé ci-dessus, le modèle original de Black et Scholes peut être utilisé en l'état, ou si un modèle intégrant des sauts est mieux adapté aux données disponibles. Nous reprenons le modèle proposé par MERTON [1976] et nous nous inspirons pour cela de la démarche proposée par RAMEZANI et ZENG [1998] pour l'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance.

Après avoir décrit le modèle et la procédure d'estimation proposée, nous illustrons cette approche avec pour exemple le titre Alcatel.

Les conséquences de la présence de sauts dans le modèle d'actif sont développées dans LOISEL et al. [2005] pour ce qui concerne la question de la détermination du capital de solvabilité et dans BALLOTTA [2004] pour les évaluations en norme IFRS de passifs d'assurance.

Le présent travail est inspiré d'un travail de recherche effectué dans le cadre de l'Institut de Science Financière et d'Assurances de l'Université Lyon 1 par BONI, GENOT et MOMEIN [2005].

## 2. Modélisation de l'actif risqué

### 2.1. Présentation du modèle

Nous reprenons le modèle proposé par MERTON [1976]. Nous considérons ainsi que le prix de l'actif  $S_t$  présente des sauts log-normaux  $V_1, \dots, V_j$  à des instants aléatoires  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$  qui sont les instants de saut d'un processus de Poisson. Entre deux instants de saut on suppose que la dynamique du cours respecte le modèle de Black et Scholes.

Cela conduit après quelques manipulations<sup>2</sup> à l'expression suivante du cours :

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\}, \quad (1)$$

où :

- $B = (B_t)_{(t \geq 0)}$  est un mouvement brownien.

<sup>2</sup> On pourra se reporter pour la démonstration à LAMBERTON et LAPEYRE [1997].

- $N = (N_t)_{(t \geq 0)}$  est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ .
- $U = (U_k)_{(k \geq 1)}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi une loi normale  $\mathbf{N}(0, \sigma_u)$ .
- Les processus  $B$ ,  $N$  et  $U$  sont mutuellement indépendants.

On supposera sans perte de généralité dans la suite que  $S(0) = 1$ .

Les sauts sont ici, dans un souci de simplicité, supposés symétriques et en moyenne nuls ; des modèles plus élaborés à sauts dissymétriques peuvent également être proposés, comme dans RAMEZANI et ZENG [1998]. Nous le considérerons pas ici, l'objectif étant d'obtenir au modèle d'un niveau de simplicité proche de celui de Black et Scholes.

Le modèle ainsi obtenu permet d'ors et déjà de représenter les différentes situations auxquelles nous nous intéressons :  $\sigma_u = 0$  ramène au modèle classique de Black et Scholes,  $\sigma = 0$  nous donne une évolution purement discontinue, et dans les autres cas le modèle intègre les deux composantes.

Notons  $\Psi_t$  la tribu engendrée par les  $B_s, N_s$  pour  $s \leq t$  et  $U_k \mathbf{1}_{\{k \leq N_t\}}$  pour  $j \geq 1$  ;  $B$  est un mouvement brownien standard par rapport à la filtration  $\Psi$ ,  $N$  est un processus adapté à cette même filtration. De plus  $\forall t > s$ ,  $N_t - N_s$  est indépendant de la tribu  $\Psi_s$ .

La loi de  $S_t$  est connue explicitement dans ce modèle :

**Proposition 1 :** Pour tout  $x > 0$ ,  $\Pr[S(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left[ \frac{\ln x - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sqrt{n\sigma_u^2 + t\sigma^2}} \right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \Pr[S(t) \leq x] &= \Pr \left[ \sum_{k=1}^{N_t} U_k + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[ \sum_{k=1}^{N_t} U_k + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x, N_t = n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[ \sum_{k=1}^n U_k + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x \right] \Pr[N_t = n], \end{aligned}$$

puisque les processus  $N$ ,  $B$  et  $U$  sont mutuellement indépendants. Par ailleurs, les processus

$\sum_{k=1}^n U_k$  et  $\sigma B_t$  étant indépendants et gaussiens, leur somme est également gaussienne :

$\sum_{k=1}^n U_k + \sigma B_t \sim \mathbf{N}(0; \sqrt{n\sigma_u^2 + t\sigma^2})$ . Enfin comme  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,

pour tout  $t > 0$ , la v. a.  $N_t$  est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$  et donc

$$\Pr[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad \square$$

Lorsque  $\lambda = 0$  (cas de l'absence de sauts) on retrouve la loi log-normale usuelle du brownien géométrique. Dans le cas général, l'expression de la proposition ci-dessus permet d'approcher numériquement la distribution de l'actif en ne conservant qu'un nombre fini de termes dans la somme. En pratique, les 7 premiers termes fournissent une approximation satisfaisante. Les applications numériques présentées dans le présent article sont effectuées en conservant les 15 premiers termes.

De plus, dans cette modélisation les moments d'ordre quelconque se calculent simplement. C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2 :** Pour tout  $p \in \mathbf{R}$  on a :

$$\mathbf{E} \left[ S(t)^p \right] = \mathbf{exp} \left\{ p \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \frac{p^2 \sigma^2}{2} t + \lambda t \left[ \mathbf{exp} \left( p^2 \sigma_u^2 / 2 \right) - 1 \right] \right\}, \quad (2)$$

**Démonstration :** Soit  $p \in \mathbf{R}$ , on a :  $\mathbf{E} \left[ S(t)^p \right] = \mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \left\{ p \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + p \sigma B_t + p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right]$ . Les termes aléatoires de l'exponentielle sont indépendants ce qui ramène le calcul au produit de  $\mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \{ p \sigma B_t \} \right]$  et  $\mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right]$ .

Pour tout  $t > 0$ ,  $B_t$  est une v. a. de loi  $\mathbf{N}(0; \sqrt{t})$  donc

$$\mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \{ p \sigma B_t \} \right] = \mathbf{exp} \left\{ \frac{p^2 \sigma^2}{2} t \right\}, \quad (3)$$

Par ailleurs on a vu (cf. la démonstration de la proposition 1) que

$$\mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right] = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^n U_k \right\} \right], \quad (4)$$

Comme les sauts sont gaussiens et centrés,

$$\mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^n U_k \right\} \right] = \mathbf{exp} \left\{ \frac{n p^2 \sigma_u^2}{2} \right\}, \quad (5)$$

et donc

$$\mathbf{E} \left[ \mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right] = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{exp} \left\{ \frac{n p^2 \sigma_u^2}{2} \right\} = \mathbf{exp} \left\{ \lambda t \left[ \mathbf{exp} \left( p^2 \sigma_u^2 / 2 \right) - 1 \right] \right\}. \quad (6)$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat.  $\square$

**Remarque :** La paramétrisation retenue pour le modèle découle directement de l'ajout d'une composante à sauts au modèle décrit par l'équation différentielle stochastique  $\frac{dS_t}{S_t} = \mu t + \sigma dB_t$  ; elle conduit à un rendement espéré égal à  $m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , et non à  $\mu$ . Lorsque l'on sera amené à comparer le modèle standard de Black et Scholes avec le modèle de Merton, on imposera comme contrainte l'égalité de l'espérance et de la variance du rendement dans les deux modèles, ce qui conduit donc à ne pas utiliser le même paramètre  $\mu$ . En notant  $m_2$  la variance totale du rendement et  $\alpha^2$  la part de cette variance associée à la composante à sauts ( $\alpha = \sigma_U \sqrt{\lambda} / \sqrt{m_2}$ ), la paramétrisation « naturelle » est donc de ce point de vue  $(m, m_2, \alpha, \lambda)$  et non  $(\mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2)$ . Nous utiliserons notre paramétrisation initiale dans la présentation des résultats théoriques, et la paramétrisation « naturelle » pour justifier le niveau des hypothèses effectuées dans les applications numériques proposées.

## 2.2. Estimation des paramètres

La démarche d'estimation des paramètres suit celle proposée dans RAMEZANI et ZENG [1998] dans le cadre d'un modèle proche. Dans un premier temps des estimateurs sont obtenus par la méthode des moments. Ces estimateurs sont utilisés pour initialiser un algorithme de maximisation de la vraisemblance, et obtenir ainsi des estimateurs plus précis bénéficiant des propriétés classiques des estimateurs du maximum de vraisemblance : convergence, efficacité asymptotique, normalité asymptotique.

Le rendement de l'actif sur  $[t, t+h]$  s'écrit :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t+h) + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=1}^{N_{t+h}} U_i\right)}{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right)} \quad (7)$$

ce qui conduit après simplification à l'expression :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma (B_{t+h} - B_t) + \sum_{N_t}^{N_{t+h}} U_i\right\} \quad (8)$$

On en déduit que, si l'on dispose de  $n$  observations des cours équiréparties aux instants  $t_i = \frac{iT}{n}$  sur un intervalle  $[0, T]$ , les variables  $x_i = x(t_i) = \ln \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$  sont telles que :

$$x_i = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{n} + \sigma \left[B\left(\frac{iT}{n}\right) - B\left(\frac{(i-1)T}{n}\right)\right] + \sum_{k=1}^{N_{iT/n}} U_k - \sum_{k=1}^{N_{(i-1)T/n}} U_k \quad (9)$$

Cela prouve que les variables aléatoires  $x_1, \dots, x_n$  sont indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes les rendements sur des intervalles disjoints sont indépendants,

et la distribution du rendement dépend de la longueur de l'intervalle mais pas de sa position. Au prix d'un changement d'échelle, on peut donc toujours supposer que le pas de la subdivision est égal à un  $\left(\frac{T}{n} = 1\right)$  ; on est ainsi ramené à déterminer la loi de  $r = \ln \frac{S(t+1)}{S(t)}$ , qui est indépendante de  $t$ . De plus, comme mélange de loi absolument continues, la loi du rendement est absolument continue. On a dans ces conditions le résultat suivant :

**Proposition 3 :** *La densité de  $r$  s'écrit :*

$$f_r(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^n}{n! \times \sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp \left( -\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \right) \right] \right] \quad (10)$$

**Démonstration :** On utilise un argument de conditionnement par rapport au nombre de sauts du processus de Poisson, qui nous conduit à écrire, avec des notations évidentes

$f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{r|n}(x) \times \Pr[N_s = n]$  ; conditionnellement au fait que le processus a sauté  $n$  fois sur  $[0,1]$ , le rendement suit une loi normale comme somme de variables gaussiennes :  $r_n = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma B(1) + \sum_{i=1}^n U_i$  d'après (9) et les propriétés de stationnarité des accroissements du mouvement brownien et du processus de Poisson ; on en déduit que :

$$f_{r|n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times (\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp \left( -\frac{1}{2 \times (\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \times \left( x - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \right)^2 \right) \quad (11)$$

ce qui permet d'obtenir le résultat.  $\square$

Incidentement, cela montre que la loi du rendement est un mélange de loi normales, la loi de mélange étant la loi de Poisson. L'équation (2) combinée avec (8) permet d'ailleurs d'obtenir une expression simple de la transformée de Laplace de  $r$  :

$$\mathbf{E} \left[ e^{-\beta r} \right] = \exp \left\{ -\beta \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \sigma^2}{2} + \lambda \left[ \exp \left( \beta^2 \sigma_u^2 / 2 \right) - 1 \right] \right\} \quad (12)$$

Nous n'utiliserons toutefois pas cette expression dans la suite.

### 2.2.1. Méthode des moments

Le modèle est décrit par quatre paramètres ; l'égalisation de quatre moments empiriques avec les moments théoriques correspondants conduit un à système de quatre équations à quatre inconnues qui va nous permettre d'en déterminer des estimateurs. Compte tenu de la forme de

la loi du rendement, on s'intéresse aux moments centrés. Si  $m = \mathbf{E}[r] = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , on va donc

calculer  $m_k = \mathbf{E}\left[(r - m)^k\right]$ ; un argument de symétrie conduit à conclure que  $m_{2k+1} = 0$ . Il suffit donc de déterminer les moments d'ordre pair. On a alors le résultat suivant :

**Proposition 4 :** *Le moment centré d'ordre  $2k$  de  $r$  s'écrit :*

$$m_{2k} = E(r - m)^{2k} = e^{-\lambda} \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_u^2)^k \quad (13)$$

**Démonstration :** Notons  $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_u^2$  la variance de la loi conditionnelle à  $N = n$ . D'après ce qui précède, on a :

$$m_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \mathbf{exp}(-\lambda)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} x^{2k} \mathbf{exp}\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(x - m)^2\right\} dx. \quad (14)$$

Le changement de variable  $u = \frac{x - m}{\sigma_n}$  conduit à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} (x - m)^{2k} \mathbf{exp}\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(x - m)^2\right\} dx = \sigma_n^{2k} c_{2k}, \quad (15)$$

avec  $c_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{2k} \mathbf{exp}\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$ . Le calcul du coefficient  $c_{2k}$  s'effectue simplement par

récurrence via une intégration par parties et on trouve finalement  $c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

On peut en particulier remarquer avec  $k = 1$  que la variance de  $r$  s'écrit  $\mathbf{V}[r] = m_2 = \sigma^2 + \lambda\sigma_u^2$ , qui est une expression naturelle. Cette expression peut également être obtenue directement par application de l'équation de décomposition de la variance.

La résolution du système non linéaire à quatre équations et quatre inconnues pour obtenir les valeurs des paramètres par cette méthode peut être effectuée par un algorithme de type Newton-Raphson et ne pose pas de difficulté particulière.

### 2.2.2. Maximum de vraisemblance

La méthode des moments a permis d'obtenir un premier jeu d'estimateurs pour les paramètres du modèle ; nous utilisons ce jeu comme valeur initiale pour déterminer le maximum local de la vraisemblance dans son voisinage. Compte tenu de la proposition 3, on obtient l'expression suivante de la vraisemblance :

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^n}{n! \times \sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp \left( -\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \right) \right] \right] \quad (16)$$

Le but est ici de maximiser la vraisemblance (ou de manière équivalente de minimiser  $-\ln L(x, \mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2)$ ). Concernant les contraintes, il vient de manière évidente  $\sigma^2 \geq 0$  et  $\sigma_u^2 \geq 0$ . Ensuite, nous allons étudier les valeurs des estimateurs issues de la méthode des moments pour encadrer les autres paramètres.

Nous disposons des estimateurs obtenus par la méthode des moments. Nous considérons que ces estimateurs approchent à plus ou moins 10 % les estimateurs du maximum de vraisemblance. Par conséquent, nous retenons d'imposer quatre contraintes d'inégalité pour l'optimisation de la log-vraisemblance. On est ainsi amené à un classique problème de maximisation sous contraintes, dont la résolution numérique n'appelle pas de remarque particulière.

### 2.3. Tests de la validité du modèle

Nous retenons trois tests de base pour nous aider à retenir le modèle le plus pertinent : le classique test du Khi-deux, le test « up and down » et le test du rapport des maxima de vraisemblance.

#### 2.3.1. Test d'adéquation du Khi-2<sup>3</sup>

Notre objectif est ici de vérifier que, après estimation des paramètres, l'adéquation des données à la loi théorique estimée. On divise donc la plage des rendements en  $k$  classes. Sous l'hypothèse nulle, si  $N_i$  est le nombre d'observations (aléatoires) appartenant à la classe  $(a_i, a_{i+1})$ , on a  $\mathbf{E}[N_i] = np_i$  où  $p_i = \mathbf{Pr}[X \in (a_i, a_{i+1})]$  pour  $i = 1, \dots, k$ . Les variables  $N_i$  suivent des lois binomiales de paramètres  $n$  et  $p_i$ , et donc, sous l'hypothèse nulle, on a

$$\frac{(N_i - np_i)}{\sqrt{np_i}} \rightarrow N(0, \sqrt{1 - p_i}).$$

La statistique  $D^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(N_i)^2}{np_i} - n$  est donc la somme de carrés de variables

aléatoires asymptotiquement normales liées par la relation  $\sum_{i=1}^n N_i = n$ . De plus les  $p = 4$  paramètres indépendants sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et il est

<sup>3</sup> Voir par exemple SAPORTA [1990].

classique que la loi limite de  $D^2$  est encadrée par les lois  $\chi_{r-p-1}^2$  et  $\chi_{r-1}^2$  du Khi deux à  $(r-p-1)$  et  $(r-1)$  degrés de liberté.

Cette approximation est justifiée si  $n$  est assez grand et les  $p_i$  pas trop petits avec comme règle empirique que  $np_i > 1$  et au moins 80 % des  $np_i \geq 5$  dans le souci du respect du critère de Cochran. Si tel n'est pas le cas à cause d'une valeur de  $p_i$  trop petite, on regroupe les classes contiguës. La p-valeur du test est encadrée par :

$$\Pr\left[\chi_{r-p-1}^2 > \chi_{obs}^2\right] \leq \alpha \leq \Pr\left[\chi_{r-1}^2 > \chi_{obs}^2\right]$$

avec  $\chi_{obs}^2 = D^2$ .

### 2.3.2. Test “up and down”

Ce test est utilisé pour vérifier l'indépendance des rendements. Soit  $Y_1, \dots, Y_2$  une suite finie de variables aléatoires réelles telles que :  $\Pr(Y_i = Y_j) = 0$  pour  $i \neq j$ . On souhaite tester pour un seuil  $\alpha > 0$ , l'hypothèse nulle que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées contre son alternative. On introduit, pour  $i = 1, \dots, n-1$ , les indicatrices  $Z_i = 1_{\{Y_{i+1} > Y_i\}}$ .

On appelle alors séquence de la suite  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  (composée de 0 et de 1) une succession du même symbole (0 ou 1) suivie et précédée de l'autre symbole ou du vide. Soit  $R$  la variable aléatoire réelle nombre total de séquences de 0 et de 1 relevées dans la réalisation  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ . On montre que, sous l'hypothèse  $H_0$  :

- (i) la loi de  $R$  est libre (*i. e.* indépendante de la loi commune des  $Y_i$ ),
- (ii)  $\mathbf{E}(R) = \frac{2n-1}{3}$  et  $\mathbf{V}(R) = \frac{16n-29}{90}$ ,
- (iii)  $\frac{R - \mathbf{E}(R)}{\sigma(R)} \xrightarrow{Loi} N(0,1)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Cette approximation normale est utilisable dès que  $n \geq 25$ .

Le test up and down rejette naturellement l'hypothèse  $H_0$  si on observe un nombre trop faible ou trop élevé de séquences. Sa région critique, de seuil asymptotique  $\alpha$ , est donc :

$$W_\alpha = \left\{ (y) : \frac{|R - \mathbf{E}(R)|}{\sigma(R)} > q_{1-\alpha/2} \right\} \quad (17)$$

où  $q_{1-\alpha/2}$  est le quantile de la loi normale. La p-valeur de ce test a pour expression :

$$\alpha = 2 \Pr \left[ N(0,1) > \frac{|R - E(R)|}{\sigma(R)} \right].$$

### 2.3.3. Test du rapport de vraisemblances

Il s'agit ici de s'assurer que l'échantillon suit un modèle de Merton plutôt que le sous-modèle constitué par le modèle de Black et Scholes.

Nous voulons donc tester  $H_0 : (\lambda, \Omega) = 0$  contre  $H_1 : (\lambda, \Omega) \neq 0$  soit  $H_0$  le modèle à sauts n'est pas adapté contre  $H_1$  les sauts sont pris en compte par le modèle. Pour cela, on considère la statistique :

$$L = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]}{\prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \times \sqrt{\left(\sigma^2 + k\sigma_u^2\right)}} \times \exp\left[-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\left(\sigma^2 + k\sigma_u^2\right)}\right] \right]} \quad (18)$$

où les  $x_i$  sont les observations de l'échantillon de rendements. La distribution de  $-2 \ln L$  est asymptotiquement celle d'un Khi-2 à  $p$  degrés de liberté dans l'hypothèse  $H_0$ , où  $p$  est le nombre de paramètres.

## 3. Applications

Nous décrivons ci-après trois applications simples du modèle proposé. L'objectif est d'illustrer à la fois la simplicité de mise en œuvre du modèle, à peine plus complexe que celui de Black et Scholes, et l'intérêt de son utilisation dans les problèmes d'assurance que ce soit pour le provisionnement de certaines garanties dans les contrats d'épargne (exemple 3.2 ci-dessous) ou pour la détermination du capital cible dans le référentiel Solvabilité 2 (exemple 3.3 ci-dessous).

Nous commençons par l'illustration de la méthode d'estimation des paramètres du modèle.

### 3.1. Ajustement du modèle à sauts sur des cours boursiers

Pour les applications numériques, nous utilisons des observations quotidiennes des cours du titre Alcatel, obtenues sur <http://www.yahoo.fr>. A partir de ces cotations, nous recalculons le rendement quotidien de la manière suivante :

$$x_i = x(t_i) = \ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \quad (19)$$

Nous obtenons ainsi un échantillon i.i.d. à partir duquel nous calculons les estimateurs empiriques des quatre moments nécessaires à l'estimation initiale des paramètres : espérance empirique et les trois premiers moments centrés.

Nous disposons d'observations quotidiennes des cours pour la période du 25 juin 2002 au 21 janvier 2005, soit 659 cours, dont l'allure générale est la suivante :



Fig. 1 - Cours à la clôture du titre Alcatel

Le rendement quotidien évolue de la manière suivante :

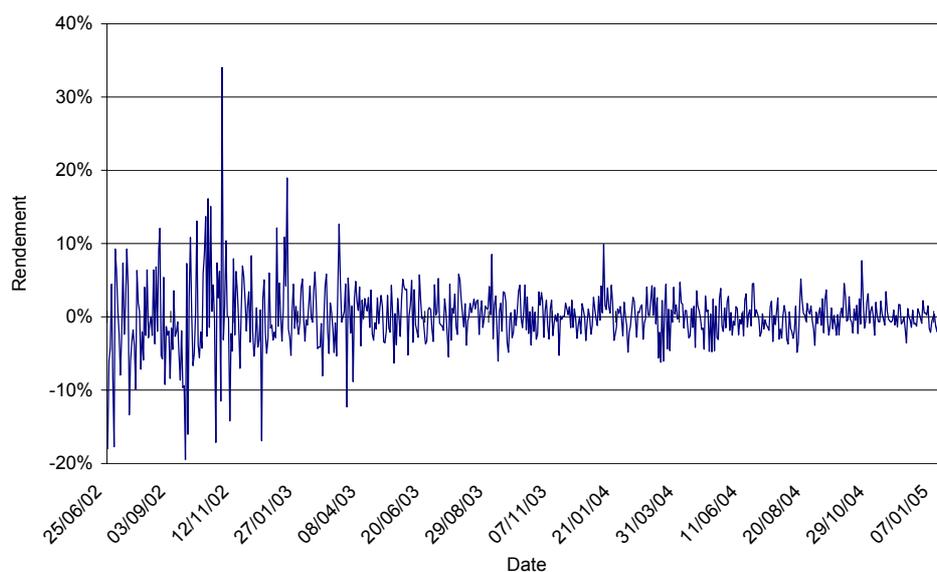


Fig. 2 - Evolution du rendement quotidien

### 3.1.1. Statistiques descriptives

Le cours moyen du titre précédent est de 9,07 €, pour un écart-type de 2,97. Le coefficient de variation vaut 32,70. Le rendement (quotidien) moyen du titre est de 0,000194695, pour un écart-type de 0,042257214 pour la période étudiée.

Le coefficient d'asymétrie du rendement du titre est de 0,527 (à comparer à 0 pour celui d'une loi normale) et le coefficient d'aplatissement de la variable rendement vaut 9,76.

Ces premières statistiques sur le rendement nous permettent de penser que l'échantillon ne suit pas une loi normale.

Le caractère non gaussien des rendements apparaît d'ailleurs clairement sur le graphe ci-dessous, sur lequel on a représenté la distribution empirique et la distribution gaussienne ajustée par le maximum de vraisemblance :

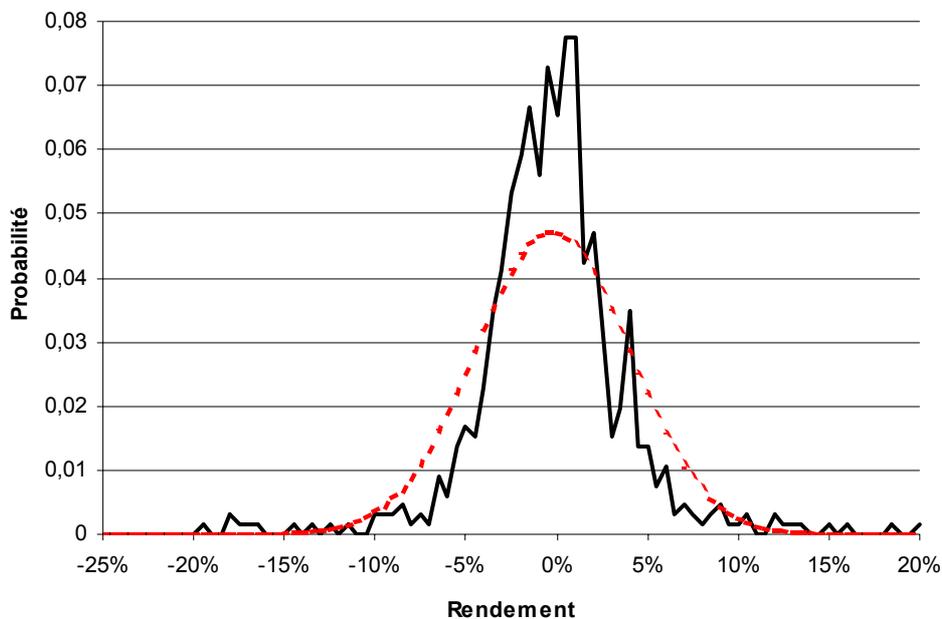


Fig. 3 - Distribution du rendement

### 3.1.2. Ajustement du modèle

Les moments centrés empiriques valent sur cet exemple :

$$\begin{aligned} m &= 0,000194695 & m_2 &= 0,001784135 \\ m_4 &= 4,05434 * 10^{-5} & m_6 &= 2,83631 * 10^{-6} \end{aligned}$$

Les estimateurs de la méthode des moments et ceux du maximum de vraisemblance sont présentés dans le tableau suivant<sup>4</sup> :

	Méthode des moments	Maximum de vraisemblance
$\mu$	0,00067364	0,00060628
$\sigma^2$	0,03095012	0,02785511
$\lambda$	0,99328746	0,89395872
$\sigma_u^2$	0,02884728	0,03173200

(En considérant qu'une année comporte 250 jours ouvrés, le rendement annuel moyen du titre est d'environ 5 % et la variance globale est égale à 45 %).

On constate qu'environ 50 % de la variance du rendement est expliquée par la composante à sauts, qui n'est donc pas négligeable. Au surplus, le passage des estimateurs par la méthode des moments aux estimateurs du maximum de vraisemblance augmente ici légèrement le poids de la composante à sauts. En comparant la distribution avec les sauts et la distribution log-normale, on trouve :

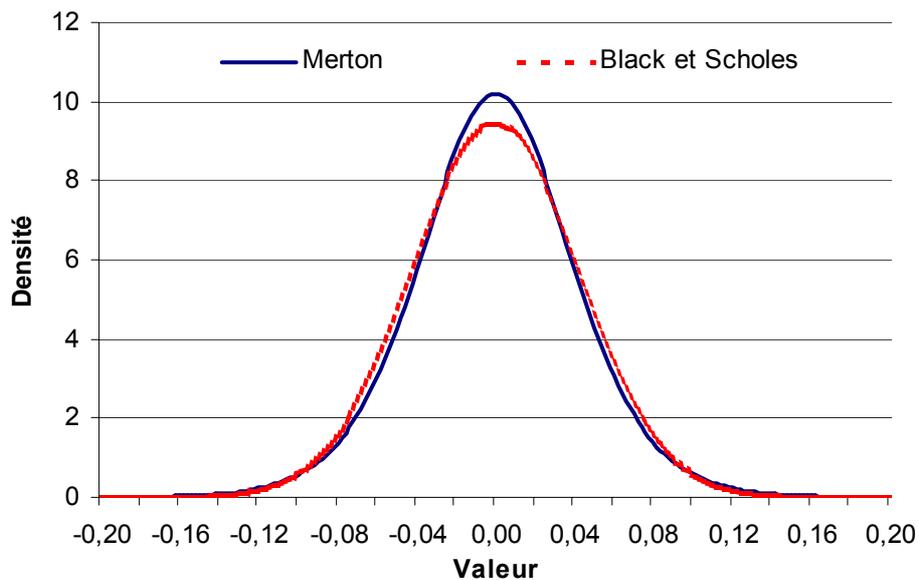


Fig. 4 - Densité des deux modèles de rendement

### 3.1.3. Commentaires

L'analyse statistique se conclut par de faibles p-valeur pour les tests d'adéquation de l'échantillon au modèle proposé. Par conséquent, et comme on pouvait s'y attendre, l'adéquation du modèle aux données est imparfaite.

Toutefois, notre but étant d'améliorer le modèle de Black et Scholes, il nous paraît intéressant

<sup>4</sup> L'unité utilisée est le jour.

de comparer les statistiques du Khi-2 pour le modèle de Merton et pour le modèle de Black et Scholes. Nous constatons que la statistique est dans le cas de Black et Scholes nettement supérieure à celle dans le cas de Merton. Cela corrobore le fait que la part de variance expliquée par la composante à sauts n'est pas négligeable.

### 3.2. Prix d'une option d'achat européenne

Afin d'illustrer sur un cas simplifié l'impact du choix du modèle d'actif sur les résultats obtenus, nous nous intéressons ci-après à la valorisation d'une option d'achat européenne avec d'une part le modèle classique de Black et Scholes et d'autre part le modèle de Merton. Nous évaluons également la probabilité d'exercice de l'option.

Dans le cas du modèle de Merton la mesure martingale n'est plus unique et le marché est donc en situation d'incomplétude. Différentes approches peuvent être retenues pour justifier le choix de la mesure utilisée pour tarifier l'option (voir BALLOTTA [2004] qui détaille ce point). Nous retenons ici la solution initiale de Merton consistant à considérer que le risque associé à la composante à sauts est non systématique (propre au titre) et donc diversifiable : on ne lui associe pas de prime de risque. Cela conduit donc à évaluer simplement l'espérance des flux associés.

Afin de réaliser une comparaison entre les deux approches, nous imposons  $\lambda = 1$  et contraignons la variance des rendements dans les deux modèles à être égale, ce qui conduit à imposer  $\sigma_{BS}^2 = \sigma^2 + \lambda\sigma_u^2$ . Avec une espérance de rendement de 8 % (en taux discret), une volatilité globale de 25 % (*i. e.*  $\sigma_{BS} = 0,25$ ), et une décomposition de la volatilité des rendement avec sauts de  $\sigma = 0,15$  et  $\sigma_U = 0,2$ , on obtient les lois des rendements dans les deux modèles qui ont l'allure suivante :

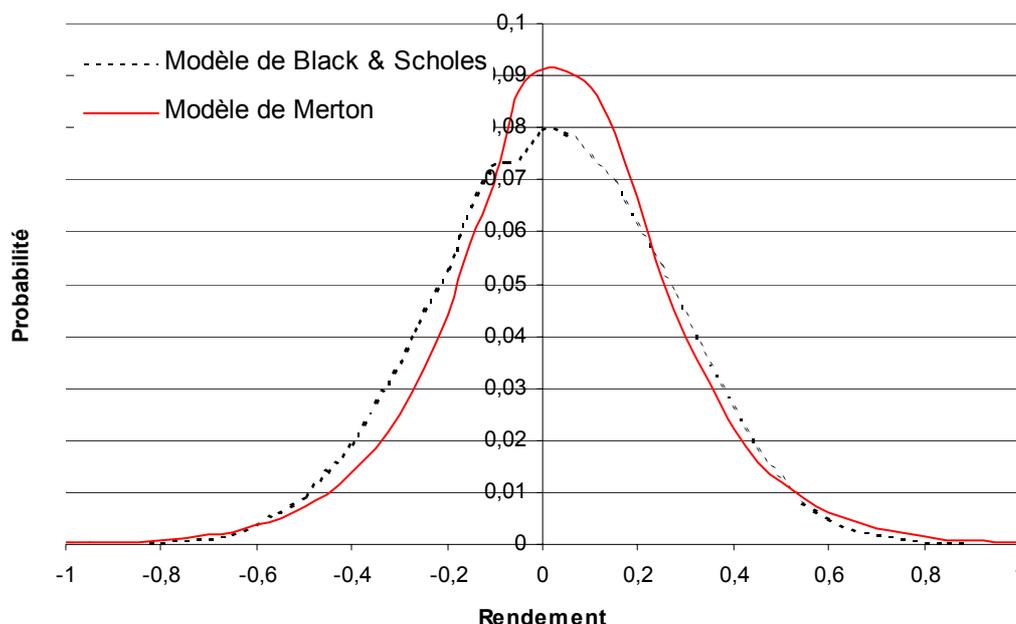


Fig. 5 - Densité du rendement

On remarque notamment la queue de distribution plus épaisse obtenue avec le modèle de Merton.

On considère un titre coté 100 à l'origine, le prix d'exercice est égal à 110 et la maturité de l'option est  $T = 1$ .

On constate alors que la probabilité d'exercice est quasiment identique dans les deux modèles, égale à 42 % ; le prix de l'option est par contre de 9,15 dans le modèle de Black et Scholes et de seulement 5,20 dans le modèle de Merton. Plus généralement, lorsque l'on fait varier la part de variance associée à la composante à sauts, la probabilité d'exercice reste stable, alors que le prix de l'option varie (et est d'autant plus proche de celui donné par Black et Scholes que la part de volatilité associée aux sauts est faible).

On mesure ainsi l'incidence potentielle sur le provisionnement et la tarification des garanties plancher des contrats en unités de compte du choix du modèle d'actif.

### 3.3. Solvabilité 2 : impact sur le capital cible

Le futur référentiel de solvabilité européen (Solvabilité 2) imposera aux sociétés d'assurance de disposer d'un niveau de fonds propres directement lié aux risques qu'elles supportent. Il s'agira donc pour les sociétés de modéliser tous les risques auxquels elles sont soumises et de calculer par le biais d'une mesure de risque le besoin en capital.

Dans un tel contexte, les modèles d'actifs retenus auront un impact sur l'exigence de fonds propres. En particulier, nous allons voir qu'avec des caractéristiques de rendement similaires, modéliser les cours par un brownien géométrique ou par le modèle de Merton a des conséquences importantes sur le capital cible.

Pour illustrer cela, nous reprenons le modèle de DEELSTRA et JANSSEN [1998] qui proposent de modéliser une société d'assurance de manière agrégée par deux processus : un pour l'actif  $(A_t)_{t \geq 0}$  et un autre pour le passif  $(L_t)_{t \geq 0}$ . Dans certains cas, par exemple lorsque ces deux processus sont des mouvements browniens géométriques, cette modélisation permet d'obtenir des résultats explicites concernant les probabilités de ruine de la société. Dans ce modèle, la richesse de la société à la date  $t$  est égale à  $A_t - L_t$  et la société est en ruine à cette date si cette richesse est négative.

Pour illustrer l'impact de la prise en compte des sauts, nous allons modéliser le passif par un mouvement brownien géométrique :

$$L_t = L_0 \exp \left\{ \left( \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2} \right) t + \sigma_L B_t^L \right\}, \quad (20)$$

et allons successivement étudier les situations où le processus d'actif intègre ou pas des sauts.

### 3.3.1. Absence de sauts

Dans cette situation, on se trouve dans la situation standard de Black et Scholes où l'actif évolue selon le processus A :

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left( \mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A \right\}. \quad (21)$$

Intéressons-nous dans un premier temps à la ruine à l'instant  $T$ . La société est en ruine en  $T$  si sa richesse est négative ou, de manière équivalente, si

$$a_t = \ln \frac{A_t}{L_t} < 0. \quad (22)$$

Dans notre situation (absence de saut), le processus d'adéquation actif-passif  $a_t$  est un mouvement brownien avec dérive ; en effet :

$$a_t = a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A - \sigma_L B_t^L. \quad (23)$$

En faisant l'hypothèse courante, en assurance non-vie notamment, que les mouvements browniens  $B^A$  et  $B^L$  sont indépendants, on peut écrire :

$$a_t = a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t. \quad (24)$$

De cette expression, vient le calcul de la probabilité d'être en ruine en  $t$  :

$$\Pr[a_t < 0] = \Pr \left[ a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t < 0 \right]. \quad (25)$$

Comme à la date  $t$ ,  $B_t \sim N(0, \sqrt{t})$ , il vient :

$$\Pr[a_t < 0] = \Phi \left[ \frac{-a_0}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t} \right]. \quad (26)$$

Les bonnes propriétés du mouvement brownien font que l'on dispose d'une formule explicite de la probabilité d'être en ruine entre 0 et  $t$ . En effet, en remarquant que

$$\Pr[\exists s \in [0, t] \mid a_s < 0] = \Pr\left[\inf_{0 \leq s \leq t} a_s < 0\right] = \Pr\left[\sup_{0 \leq s \leq t} -a_s > 0\right], \quad (27)$$

il est possible d'utiliser la relation suivante démontrée dans REVUZ et YOR [1999] :

$$\Pr\left[\sup_{0 \leq s \leq t} (B_t - \beta t) > \alpha\right] = \begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} + \beta\sqrt{t}\right) + e^{-2\beta\alpha} \Phi\left(\beta\sqrt{t} - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right) & \text{pour } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pour } \alpha \leq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Dans notre cas,  $\alpha = \frac{a_0}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}$  et  $\beta = \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}$ . En supposant que la richesse initiale est strictement positive soit  $A_0 > L_0$  (le cas contraire correspondant à la ruine en 0), il vient donc

$$\Pr\left[\inf_{0 \leq s \leq t} a_s < 0\right] = 1 - \Phi\left(\frac{a_0}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t}} + \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}\sqrt{t}\right) + e^{-2\frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}a_0} \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}\sqrt{t} - \frac{a_0}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t}}\right) \quad (29)$$

### 3.3.2. Prise en compte des sauts

A présent nous allons voir l'impact de la prise en compte des sauts sur le niveau de la probabilité de ruine. L'actif est maintenant modélisé par le processus suivant :

$$A_t = A_0 \exp\left\{\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A B_t^A + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\}. \quad (30)$$

où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et où les variables aléatoires  $U_1, U_2, \dots$  sont mutuellement indépendantes et distribuées selon une loi  $N(0, \sigma_U)$ .

En supposant toujours l'indépendance entre le risque du passif modélisé par  $B^L$  et les risques d'actif modélisés par les processus  $N, B^A$  et la suite  $U_1, U_2, \dots$ , le processus d'adéquation actif-passif a la forme :

$$a_t = a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k. \quad (31)$$

La probabilité de ruine à la date t est :

$$\Pr[a_t < 0] = \Pr \left[ \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k < -a_0 - \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \right], \quad (32)$$

dont une expression est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 5 :** Lorsque  $N, B^A, B^L$  et  $U$  sont mutuellement indépendants, on a :

$$\Pr[a_t < 0] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left( -\frac{a_0 + \mu_a t}{\sqrt{\sigma_a^2 t + n \sigma_U^2}} \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \text{où} \quad \mu_a = \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \quad \text{et}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}.$$

**Démonstration :** Le résultat provient de l'application du théorème des probabilités totales :

$$\Pr[a_t < 0] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[ \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^n U_k < -a_0 - \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \right] \Pr[N_t = n], \quad \text{en}$$

remarquant que  $\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^n U_k \sim N \left( 0, \sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t + n \sigma_U^2} \right)$ .  $\square$

La probabilité d'avoir été en ruine sur l'intervalle  $[0, t]$  n'a pas d'expression explicite, et doit être évaluée numériquement. En pratique, on pourra utiliser des méthodes de simulation pour estimer cette quantité.

### 3.3.3. Application numérique

Dans un contexte de type Solvabilité 2, une société d'assurance devra disposer d'un niveau de fonds propres (le capital cible) qui contrôle le risque global de la société à un horizon prédéterminé. Considérons ici que la mesure du risque global de la société est la probabilité de ruine qu'il s'agit de contrôler à horizon 1 an avec une probabilité de 1 %.

Nous avons supposé qu'au bout d'une année, la société devait avoir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 100. L'assureur dispose en 0 de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le montant du capital cible  $\gamma$  tel que :

$$\Pr \left[ (100 + \gamma) \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma B_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k \right\} \leq 100 \right] \leq 0,01.$$

Par ailleurs, nous avons utilisé les paramètres suivants :

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} = \ln 0,08 \quad \lambda = 1,5 \quad \sigma^2 + \lambda\sigma_U^2 = 0,16,$$

Le rendement discret du titre est donc de 8 %, il y a en moyenne 1,5 sauts par an et l'écart-type du rendement est égal à 40 %. Nous nous intéressons à la variation du capital cible en fonction de la part de la variance expliquée par la composante à sauts ( $\alpha$  avec les notations introduites *supra* en 2.1).

Selon que le risque est modélisé uniquement par la composante à sauts ( $\alpha = 1$ ) ou uniquement par le mouvement brownien ( $\alpha = 0$ ), les distributions du cours du titre en 1 sont très différentes (pour un prix d'achat de 100 en 0) comme le montre le graphique suivant.

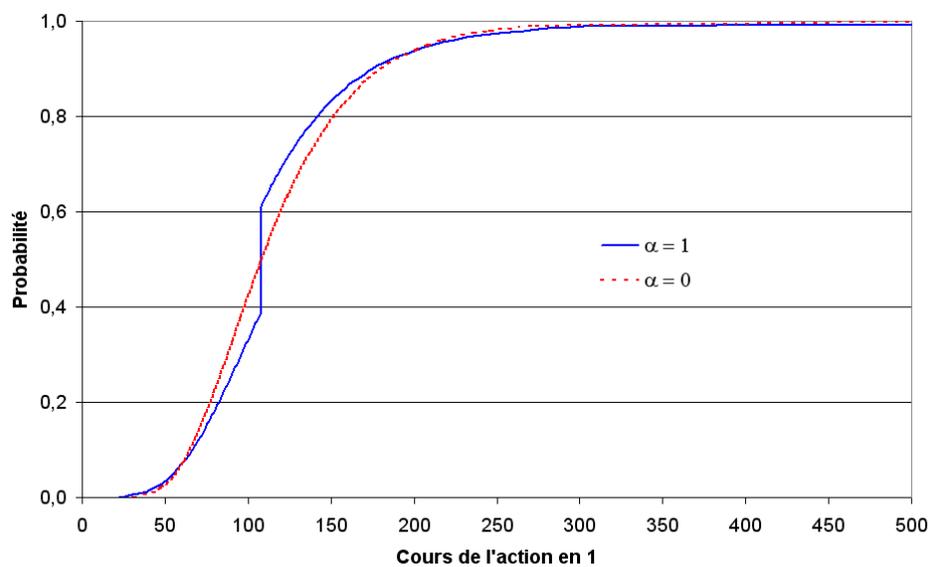


Fig. 6 - Distributions du cours de l'action en 1 pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0$

Lorsque toute la variabilité est représentée par les sauts, on remarque qu'une partie de la courbe est plate. Cette partie de la fonction de répartition correspond à la probabilité qu'il n'y ait pas de saut  $\Pr[N_1 = 0] = e^{-\lambda} \approx 0,22$  auquel cas le rendement est de 8 %.

Le graphique suivant nous indique le montant du capital cible en fonction de la part de la variabilité représentée par la composante brownienne. Rappelons que nous travaillons à variance du rendement constante et que la variabilité qui n'est pas représenté par le brownien l'est par la composante à sauts.

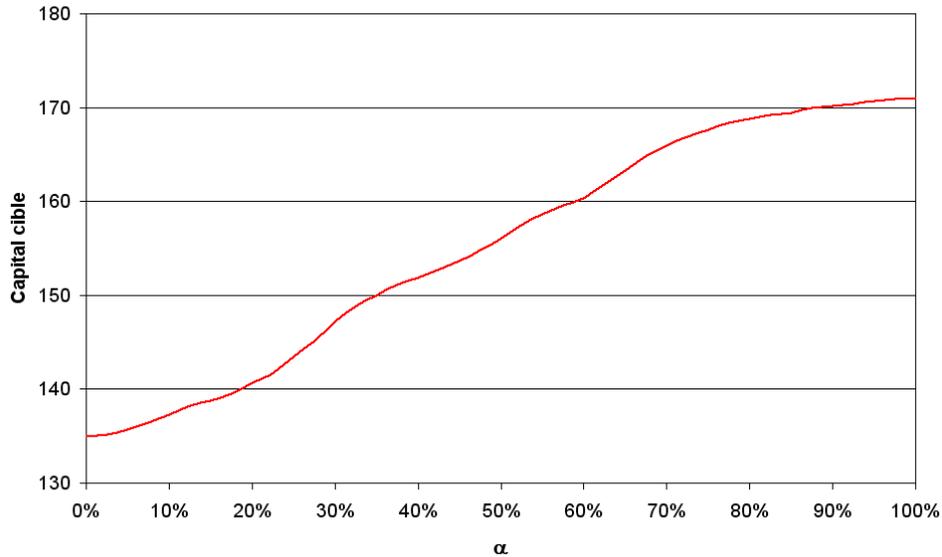


Fig. 7 - Niveau du capital cible  $\gamma$  en fonction de  $\alpha$ .

Il ressort de cet illustration, que l'utilisation d'un modèle de type Black et Scholes conduit à sous-estimer le niveau du capital cible dans une proportion qui peut être importante. Ainsi si la moitié de la variabilité globale est expliquée par les sauts, le capital cible issu du modèle de Black et Scholes sous-estime de 13,5 % le vrai besoin en capital.

Ces résultats peuvent être rapprochés des résultats obtenus dans PLANCHET et THEROND [2005] qui illustrent l'impact de la prise en compte des sauts sur le capital cible dans une problématique d'assurance non-vie.

## 4. Conclusion

Le modèle de Black et Scholes est devenu un standard utilisé dans de nombreuses situations pratiques en assurance : calculs d'engagements (garanties planchers sur les contrats en unités de comptes), allocation d'actifs, détermination de la probabilité de ruine, etc.

La principale qualité de ce modèle réside dans sa facilité de mise en œuvre (calcul des fonctionnelles associées, estimation des paramètres, etc.), son adéquation aux données étant en générale de qualité modeste.

Le modèle que nous présentons ici, proposé initialement par Merton, nous semble préserver la simplicité d'utilisation, tout en améliorant de manière sensible l'adéquation aux données. Il nous semble d'autant plus intéressant qu'il permet d'intégrer à la modélisation de l'actif des propriétés telles que l'asymétrie et une queue de distribution plus épaisse que celle d'une loi normale, ces propriétés n'étant pas sans conséquence sur l'appréciation du niveau du capital de solvabilité au sens de Solvabilité 2.

Ainsi, les réflexions sur le modèle standard de Solvabilité 2 (voir par exemple DJEHICHE et HÖRFELT [2004] ou PLANCHET et THEROND [2005]) doivent à notre sens intégrer ce type de modèle pour garantir une appréciation suffisante de la solvabilité dans ce nouveau référentiel.

## Bibliographie

AAI [2004] *A global framework for insurer solvency assessment*. www.actuaires.org

BALLOTTA L. [2004] « Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts ». *Proceedings of the 14<sup>th</sup> AFIR Colloquium*, 337-367.

BELLAMY N. [1999] *Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus*. Thèse de doctorat, Université d'Evry.

BLACK F., SCHOLES M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities ». *Journal of political Economy*, vol. 81, n°3, 637-654.

BONI E., GENOT B., MOMEIN A. [2005] *Un modèle statistique de détection des sauts dans un processus de cours boursiers*. Mémoire de groupe de travail, ISFA.

COMMISSION EUROPEENNE [2003] « Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union européenne - Recommandation des services de la Commission ». Document de travail, MARKT/2509/03.

COMMISSION EUROPÉENNE [2004] « Solvency II - Organisation of work, discussion on pillar I work areas and suggestions of further work on pillar II for CEIOPS ». Document de travail, MARKT/2543/03.

DEELSTRA G., JANSSEN J. [1998] « Interaction Between Asset Liability Management and Risk Theory ». *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, vol. 14, 295-307.

D'ESTAMPES L. [2003] *Traitement statistique des processus alpha-stables*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

DJEHICHE B., HÖRFELT P. [2004] « Standard approaches to asset and liability risk ». Working paper.

DRITSCHEL M., PROTTER Ph. [1999] « Complete markets with discontinuous security price ». *Finance and Stochastics*, vol. 3, 203-214.

FAMA E.F. [1965] « The behavior of stock market price ». *Journal of business*, vol. 38, 34-195.

FAMA E.F., ROLL R. [1971] « Parameter estimates for symmetric stable distributions ». *Journal of American Statistical Association*, vol. 66, 331-336.

HULL J., WHITE A. [1987] « The pricing of options with stochastic volatilities ». *Journal of Finance*, vol. 42, 281-300.

LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2<sup>e</sup> édition. Paris : Ellipses.

LOISEL S., PLANCHET F., THEROND P. [2005] « Impact de la prise en compte de discontinuités à l'actif sur la probabilité de ruine dans un référentiel de type Solvabilité 2 ». Working paper.

MANDELBROT B. [1962] « Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy ». *Comptes rendus à l'Académie des sciences*, vol. 254, 3968–3970.

MANDELBROT B. [1963] « The variation of certain speculative prices ». *Journal of business*, vol. 36, 394–419.

MERTON R.C. [1976] « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous ». *Journal of Financial Economics*, vol. 3, 224-44

PLANCHET F., THEROND P.E. [2005] « Allocation d'actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie : présentation et mise en œuvre dans la réglementation française et dans un référentiel de type Solvabilité 2 ». *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP 2026.

RAMEZANI C.A.; ZENG Y. [1998] « Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes: application to security prices ». Working paper.

REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*, third edition. Berlin: Springer Verlag.

SAPORTA G. [1990] *Probabilités, analyse des données et statistique*. Paris : Editions Technip.

WALTER C. [1994] *Les structures du hasard en économie : efficacité des marchés, lois stables et processus fractals*. Thèse de doctorat, IEP Paris.